

Cálculo Diferencial e Integral II
Teste 1 (versão 2) - 07 de Novembro de 2015 - 08h
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função dada por

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

[2.0] (a) Mostre que g não é contínua na origem.

[1.0] (b) Calcule $\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0)$.

[2.0] (c) Calcule a derivada de g segundo o vetor $(-1, 2)$ no ponto $(0, 1)$.

[2.0] 2. Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $f(1, 1) = 1$ e $\nabla f(1, 1) = (1, -1)$. Considere a função g definida por

$$g(x, y) = f(y^2, f(y^2, x^2)).$$

Calcule $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1)$.

3. Considere a função $g(x, y, z) = e^{y^2+z^2} + \cos x$.

[1.0] (a) Determine os pontos de estacionaridade de g .

[1.0] (b) Classifique os pontos determinados na alínea anterior.

4. Considere o conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y < 1; z^2 + y < 1; x > 0; y > 0; z > 0\}.$$

[3.0] (a) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais triplas iterados da forma $\int(\int(\int dy)dx)dz$.

[2.0] (b) Calcule o volume de A usando um só integral triplo iterado.

[3.0] 5. Usando coordenadas cilíndricas calcule o volume do conjunto

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 2 - \sqrt{x^2 + y^2}; x > 0; y > 0\}.$$

[3.0] 6. Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua cujas derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem num ponto (a, b) .

Prove que, se $\frac{\partial f}{\partial x}$ for contínua numa bola centrada em (a, b) , então f é diferenciável nesse ponto.