Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Resolução Abreviada do Teste 1 - 12 de Abril de 2014 - Versão A

1) Diga, justificadamente, se existe o $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x+3y)}{x+y}$.

Resolução:

Sendo $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x+3y)}{x+y}$, $x \neq -y$, tem-se que

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} 3\,\frac{\operatorname{sen}(3y)}{3y} = 3.$$

Logo $\nexists \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

2) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+7y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de f no seu domínio.

Resolução:

Tem-se que $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}^2$. Consideramos dois casos.

- Caso em que $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Das propriedades das funções contínuas segue-se que f é contínua neste ponto dado que em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ é definida por um quociente de funções contínuas (polinómios) cujo denominador não se anula.
- Caso em que $(x,y) = (0,0)$. A função f será contínua em $(0,0)$ se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

Temos que para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$0 \leq \left|\frac{x^3}{x^2+7y^2}\right| = \frac{|x^3|}{x^2+7y^2} \leq \frac{|x^3|}{x^2} = |x|,$$

donde $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

(b) Verifique que a derivada de f no ponto $(0,0)$ segundo um vector $(a,b) \neq (0,0)$ é dada por $\dfrac{a^3}{a^2+7b^2}$. Obtenha em particular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Resolução:

Por definição

$$D_{(a,b)}f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f\big((0,0)+h(a,b)\big) - f(0,0)}{h} = \frac{a^3}{a^2+7b^2}$$

Em particular

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \equiv D_{(1,0)}f(0,0) = 1$$

3) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^2 tal que

$$Df(2,5) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Dada $g(t) = f(t, 2t+1)$ calcule $g'(2)$.

Resolução:

A função g é a composição da função f com $h(t) = (t, 2t+1)$, $t \in \mathbb{R}$. Dado que tanto f como h são funções diferenciáveis, concluímos, pelo teorema da derivada da função composta, que g é diferenciável no seu domínio, isto é, em $\mathbb{R}$, e que para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$g'(t) = Df(h(t)) \cdot h'(t),$$

sendo

$$Dh(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Assim

$$g'(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

4) Determine e classifique os pontos críticos de $f(x,y) = y^3 - x^2 - 3y^2 + 6x$.

Resolução:

Calculamos os pontos críticos de f. Temos que

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (-2x+6, 3y^2-6y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (3,0) \text{ ou } (x,y) = (3,2).$$

Para classificar estes pontos calculamos a matriz Hessiana de f. Para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que,

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{bmatrix}.$$

Em particular

$$H_f(3,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

donde se deduz, pelo teorema de classificação de pontos críticos, dado que os valores própios de $H_f(3,0)$ são negativos, que $(3,0)$ é um ponto de máximo local de f. Por outro lado

$$H_f(3,2) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

pelo que, por sua vez, o ponto $(3,2)$ é um ponto de sela de f, dado que os valores própios de $H_f(3,2)$ têm sinais opostos.

5) Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2+y^2},\, x^2+y^2 \leq 1,\, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

a) Escreva uma expressão para o volume de A através de integrais da forma $\int(\int(\int\ dx)dy)dz$.

b) Seja $f(x,y,z) = z$. Calcule o integral de f em A.

Resolução:

a) É fácil ver que $z \in [0,1]$. Fazendo cortes com $z = \mathit{constante} \in [0,1]$ pode-se ver que

$$Vol(A) = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} 1dx \right) dy \right) dz + \int_1^2 \left(\int_0^{2-z} \left(\int_0^{\sqrt{(2-z)^2-y^2}} 1dx \right) dy \right) dz$$

b) Usando coordenadas cilíndricas obtemos que

$$\int\int\int_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{2-\rho} z\rho dz\, d\rho\, d\theta = \frac{11}{48}\pi.$$

6) Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto tal que para $a, x \in D$ o segmento de recta que une a e x está contido em D. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Mostre que

$$f(x) = f(a) + \int_0^1 \nabla f(a + t(x-a)) \cdot (x-a)\, dt.$$

Resolução:

Seja $\gamma : [0,1] \to D$ o caminho $\gamma(t) = a + t(x-a)$, com $\gamma(0) = a, \gamma(1) = x$. Então, pelo teorema da derivada da função composta,

$$(f \circ \gamma)'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \nabla f(a + t(x-a)) \cdot (x-a).$$

Integrando em $[0,1]$, e aplicando o teorema fundamental do cálculo, conclui-se que

$$f(x) - f(a) = \int_0^1 (f \circ \gamma)'(t)dt = \int_0^1 \nabla f(a + t(x-a)) \cdot (x-a)dt.$$