Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Testes de Recuperação - v2 - 28 de Janeiro de 2020

Duração: 1h30m

Teste 1

Apresente e justifique todos os cálculos

[2.0] 1. Calcule (justificando) ou mostre que não existe o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\mathrm{sen}(x)x^4 + y^4}{x^4 + x^2y^2 + y^2}$.

2. Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \mathrm{sen}(\sqrt{|xy|})$.

[1.0] a) Calcule ou mostre que não existe $\nabla f(0,0)$.

[1.5] b) Calcule ou mostre que não existe $D_{(1,1)}f(0,0)$.

[1.0] c) Determine se f é diferenciável em $(0,0)$.

[3.0] 3. Considere a função $h(x,y) = f(e^x + xy, x + y)$, onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que $\nabla f(1,2) = (1,3)$. Mostre que h é diferenciável em $(0,2)$ e calcule a derivada $Dh(0,2)$.

[2.0] 4. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = 2x^3 + 3yx^2 - y^3 + 3y$. Determine os pontos críticos de g e classifique-os.

5. Considere o conjunto $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+z < 1\,;\, y^2+z < 1\,;\, x > 0\,;\, y > 0\,;\, z > 0\}$. Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma:

[1.0] a) $\int(\int(\int dx)dy)dz$;

[2.0] b) $\int(\int(\int dz)dx)dy$.

[1.5] 6. Use uma mudança de variáveis adequada para calcular a área do conjunto

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x + y < 3\,; x < y < x + 1\}.$$

[2.0] 7. Calcule $\displaystyle\int_V f$ em que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x,y,z) = y$, e

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 3 - 2\sqrt{x^2 + y^2}\,; y > 0\},$$

usando coordenadas cilíndricas.

[3.0] 8. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função cujas derivadas parciais existem numa bola centrada no ponto (a,b) sendo uma delas contínua nesse ponto. Mostre que f é diferenciável em (a,b).

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Testes de Recuperação - v2 - 28 de Janeiro de 2020

Duração: 1h30m

Teste 2

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (z-1)^3 - xy = 1\}$.

[2.0] a) Mostre que o conjunto S é uma variedade e determine a sua dimensão.

[1.0] b) Determine uma base do espaço tangente a S no ponto $(0,1,2)$.

[2.5] 2. Mostre que o sistema de equações

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(xyz) + x^3 + 2z^2 - y^3 = 3 \\ z = x \end{cases}$$

define, nalguma vizinhança do ponto $(1,0,1)$, x e z como funções, de classe C^1, de y. Calcule $\dfrac{dx}{dy}(0)$ e $\dfrac{dz}{dy}(0)$.

[3.0] 3. Considere o conjunto

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2,\ y + z = 2\}.$$

Determine o valor máximo da coordenada y em C.

[2.5] 4. Determine o trabalho realizado pelo campo $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\} \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2 + (y-1)^2} - y, \frac{y-1}{x^2 + (y-1)^2} - x\right)$$

ao longo de uma curva com início em $(0,2)$ e término em $(1,1)$.

[3.0] 5. Considere a superfície $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ 0 < z < 1\}$, e o campo vetorial

$$F(x,y,z) = \Big((1-z)y, -(1-z)x, z(1-z^2)e^{x^2 y}\Big).$$

Calcule o fluxo $\displaystyle\int_S \operatorname{rot} F \cdot n$ onde n é a normal unitária satisfazendo $n(0,1,\frac{1}{2}) = (0,1,0)$.

[3.0] 6. Considere o domínio regular $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < 1 - x^2 - z^2\}$ e o campo vetorial

$$F(x,y,z) = \Big(2x - x(1 - x^2 - z^2 - y)e^{y^2},\ 0,\ 2z\Big).$$

Use o Teorema da Divergência para calcular o integral triplo $\displaystyle\iiint_V \operatorname{div} F$.

[3.0] 7. Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^1 e seja $\mathbf{0} = (0,0,0)$. Mostre que

$$\frac{\partial F_3}{\partial y}(\mathbf{0}) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(\mathbf{0}) + \frac{\partial F_1}{\partial z}(\mathbf{0}) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(\mathbf{0}) = \lim_{\epsilon \to 0} \tfrac{\sqrt{2}}{\pi \epsilon^2} \int_{C_\epsilon} F \cdot d\gamma_\epsilon,$$

onde $\gamma_\epsilon(t) = \left(\frac{\epsilon \cos t}{\sqrt{2}}, -\frac{\epsilon \cos t}{\sqrt{2}}, -\epsilon \operatorname{sen} t\right)$, $t \in [0, 2\pi]$, e $C_\epsilon = \{\gamma_\epsilon(t) : t \in [0, 2\pi]\}$.