Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Testes de Recuperação - v1 - 28 de Janeiro de 2020

Duração: 1h30m

Teste 1

Apresente e justifique todos os cálculos

[2.0] 1. Calcule (justificando) ou mostre que não existe o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+\text{sen}(x)y^4}{x^2+x^2y^2+y^4}$.

2. Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = e^{\sqrt{|xy|}} - 1$.

[1.0] a) Calcule ou mostre que não existe $\nabla f(0,0)$.

[1.5] b) Calcule ou mostre que não existe $D_{(1,1)}f(0,0)$.

[1.0] c) Determine se f é diferenciável em $(0,0)$.

[3.0] 3. Considere a função $h(x,y) = f(x-y, e^y+xy)$, onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que $\nabla f(2,1) = (3,1)$. Mostre que h é diferenciável em $(2,0)$ e calcule a derivada $Dh(2,0)$.

[2.0] 4. Considere a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y) = 2y^3 + 3xy^2 - x^3 + 3x$. Determine os pontos críticos de h e classifique-os.

5. Considere o conjunto $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y+z<1\,;\, x^2+z<1\,;\, x>0\,;\, y>0\,;\, z>0\}$. Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma:

[1.0] a) $\int(\int(\int dy)dx)dz$;

[2.0] b) $\int(\int(\int dz)dy)dx$.

[1.5] 6. Use uma mudança de variáveis adequada para calcular a área do conjunto

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x<y<1+x\,;\, 1<x+y<2\}.$$

[2.0] 7. Calcule $\displaystyle\int_V f$ em que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x,y,z) = x$, e

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} < z < 3-2x^2-2y^2\,;\, x>0\,;\, y>0\},$$

usando coordenadas cilíndricas.

[3.0] 8. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função cujas derivadas parciais existem numa bola centrada no ponto (a,b) sendo uma delas contínua nesse ponto. Mostre que f é diferenciável em (a,b).

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Testes de Recuperação - v1 - 28 de Janeiro de 2020

Duração: 1h30m

Teste 2

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^3 - yz = 1\}$.

[2.0] a) Mostre que o conjunto M é uma variedade e determine a sua dimensão.

[1.0] b) Determine uma base do espaço tangente a M no ponto $(2,1,0)$.

[2.5] 2. Mostre que o sistema de equações

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(xyz) + x^2 - z^3 + y^3 = 2 \\ y = x \end{cases}$$

define, nalguma vizinhança do ponto $(1,1,0)$, x e y como funções, de classe C^1, de z. Calcule $\dfrac{dx}{dz}(0)$ e $\dfrac{dy}{dz}(0)$.

[3.0] 3. Considere o conjunto

$$L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2,\ x + z = 2\}.$$

Determine o valor máximo da coordenada x em L.

[2.5] 4. Determine o trabalho realizado pelo campo $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$F(x,y) = \left(\frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} + y, \frac{y}{(x-1)^2 + y^2} + x \right)$$

ao longo de uma curva com início em $(2,0)$ e término em $(1,1)$.

[3.0] 5. Considere superfície $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ 0 < z < 1\}$ e o campo vetorial

$$F(x,y,z) = \left(yz^2, -xz^2, z^2(1-z)e^{xy^2} \right).$$

Calcule o fluxo $\displaystyle\int_S \operatorname{rot} F \cdot n$ onde n é a normal unitária satisfazendo $n(1,0,\frac{1}{2}) = (1,0,0)$.

[3.0] 6. Considere o domínio regular $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1 - y^2 - z^2\}$ e o campo vetorial

$$F(x,y,z) = \left(0,\ 2y - y(1 - y^2 - z^2 - x)e^{x^2},\ 2z \right).$$

Use o Teorema da Divergência para calcular o integral triplo $\displaystyle\iiint_V \operatorname{div} F$.

[3.0] 7. Seja $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^1 e seja $\mathbf{0} = (0,0,0)$. Mostre que

$$\frac{\partial F_3}{\partial y}(\mathbf{0}) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(\mathbf{0}) + \frac{\partial F_1}{\partial z}(\mathbf{0}) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(\mathbf{0}) = \lim_{\epsilon \to 0} \tfrac{\sqrt{2}}{\pi\epsilon^2} \int_{C_\epsilon} F \cdot d\gamma_\epsilon,$$

onde $\gamma_\epsilon(t) = \left(\frac{\epsilon \cos t}{\sqrt{2}}, -\frac{\epsilon \cos t}{\sqrt{2}}, -\epsilon \operatorname{sen} t \right)$, $t \in [0, 2\pi]$, e $C_\epsilon = \{\gamma_\epsilon(t) : t \in [0,2\pi]\}$.