

Cálculo Diferencial e Integral II
Exame/Teste de Recuperação - 26 de Janeiro de 2015 - v2
Duração: Exame (3h), Teste (1h30)

Apresente e justifique todos os cálculos

Teste 1

1. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

[2.0] a) Calcule a derivada direcional $D_v f(0, 0, 0)$, onde v é o vetor $(1, 0, 1)$.

[1.0] b) Estude a diferenciabilidade de f . **Sugestão:** comece por calcular as derivadas parciais em $(0, 0, 0)$.

[2.0] 2. Seja $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$, onde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é diferenciável e

$$Df(\sqrt{3}, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\frac{\partial g}{\partial \theta}(2, \pi/6)$.

3. Considere a função $f(x, y) = xe^y - x$.

[2.0] a) Calcule os pontos críticos de f .

[2.0] b) Classifique os pontos críticos de f .

[2.0] 4. Inverta a ordem de integração no integral $\int_{-1}^1 \left(\int_{1-x^2}^2 f(x, y) dy \right) dx$.

[2.0] 5. Calcule a área do conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{(y-2)^2}{9} \leq 1\}$ usando uma mudança de coordenadas apropriada.

[2.0] 6. Considere o conjunto

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - x^2 ; 0 \leq x \leq 1 ; 0 \leq y \leq 1\}.$$

Escreva uma expressão para $\iiint_X f$ em termos de integrais iterados da forma

$$\int \left(\int \left(\int f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz.$$

[2.0] 7. Usando coordenadas cilíndricas, calcule $\iiint_B x dx dy dz$ onde B é o conjunto seguinte:

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 \leq z \leq 1 ; y > 0\}.$$

[3.0] 8. Demonstre a *regra de Leibniz*:

Dada $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 e $a, b \in \mathbb{R}$, a função $F(x) = \int_a^b f(x, y) dy$ é de classe C^1 e

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy.$$

Sugestão: Considere a função $f(0, y) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(t, y) dt$ e use o Teorema de Fubini.

Teste 2

1. Seja $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z = 1 ; z = y^2 ; x > 0\}$.

[2.0] a) Verifique que M é uma variedade em \mathbb{R}^3 e determine a respectiva dimensão.

[2.0] b) Determine um vector tangente a M no ponto $(1, 2, 4)$.

[2.0] 2. Determine os extremos de $f(x, y) = y^2$ no conjunto $x^2 - xy + y^2 = 1$.

[2.0] 3. Mostre que a equação $e^{x-y} + x^2 - y^2 - e(x+1) + z^2 + z + 1 = 0$ define z como uma função $z = z(x, y)$ de classe C^1 numa vizinhança de $(x, y, z) = (0, -1, 0)$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}(0, -1)$.

4. Considere a linha $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 + z^2 ; z = 2 ; y^2 + z^2 \leq 8\}$.

[2.0] a) Parametrize L .

[1.0] b) Determine a carga de L sabendo que a respectiva densidade de carga é dada pela função $\sigma(x, y, z) = \sqrt{1 + 4y^2}$.

[2.0] 5. Use o teorema de Green para calcular o trabalho realizado pelo seguinte campo vetorial $F(x, y) = (3y, 2 - 2x)$ ao longo do segmento de recta entre a origem e o ponto $(1, 3)$.

[2.0] 6. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 ; z > 0\}$$

e o campo vetorial

$$F(x, y, z) = (x(z^2 - 2), 5 - yz^2, 2z).$$

Usando o teorema da divergência calcule o fluxo de F através de S segundo a normal com terceira componente negativa.

[2.0] 7. Use o teorema de Stokes para calcular o trabalho realizado pelo campo vetorial

$$F(x, y, z) = (z - y, x, x + z^3)$$

ao longo da linha dada pelas equações $x^2 + y^2 = 1 ; z = 1 - x$, num sentido à sua escolha.

[3.0] 8. Considere o campo vetorial $F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$ e um campo vetorial G fechado, definido e de classe C^1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Mostre que existe $a \in \mathbb{R}$ e um campo escalar ϕ tal que $G = aF + \nabla\phi$.