Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Exame/Teste de Recuperação - 26 de Janeiro de 2015 - v1
Duração: Exame (3h), Teste (1h30)

Apresente e justifique todos os cálculos

Teste 1

1. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

[2.0] a) Calcule a derivada direcional $D_v f(0,0,0)$, onde v é o vetor $(1,1,1)$.

[1.0] b) Estude a diferenciabilidade de f. **Sugestão:** comece por calcular as derivadas parciais em $(0,0,0)$.

[2.0] 2. Seja $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$, onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é diferenciável e

$$Df\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\frac{\partial g}{\partial r}(2, \pi/4)$.

3. Considere a função $f(x,y) = e^{2x} - 2e^x + 1 + y^2$.

[2.0] a) Calcule os pontos críticos de f.

[2.0] b) Classifique os pontos críticos de f.

[2.0] 4. Inverta a ordem de integração no integral $\int_{-1}^{1}\left(\int_0^{x^2+1} f(x,y)dy\right)dx$.

[2.0] 5. Calcule a área do conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-1)^2}{4} + y^2 \leq 1\}$ usando uma mudança de coordenadas apropriada.

[2.0] 6. Considere o conjunto

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq y^2 \; ; \; 0 \leq x \leq 1 \; ; \; 0 \leq y \leq 1\}.$$

Escreva uma expressão para $\iiint_X f$ em termos de integrais iterados da forma

$$\int \left(\int \left(\int f(x,y,z)dx \right) dy \right) dz.$$

[2.0] 7. Usando coordenadas cilíndricas, calcule $\iiint_B y\,dxdydz$ onde B é o conjunto seguinte:

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - (\sqrt{x^2+y^2}-1)^2 \; ; \; x > 0\}.$$

[3.0] 8. Demonstre a *regra de Leibniz*:
Dada $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e $a, b \in \mathbb{R}$, a função $F(x) = \int_a^b f(x,y)dy$ é de classe C^1 e

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy.$$

Sugestão: Considere a função $f(0,y) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(t,y)\,dt$ e use o Teorema de Fubini.

Teste 2

1. Seja $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \; ; \; z = y \; ; \; x > 0\}$.

[2.0] a) Verifique que M é uma variedade em $\mathbb{R}^3$ e determine a respectiva dimensão.

[2.0] b) Determine um vector tangente a M no ponto $(1,0,0)$.

[2.0] 2. Determine os extremos de $f(x,y) = x^2$ no conjunto $x^2 - xy + y^2 = 1$.

[2.0] 3. Mostre que a equação $e^{x-y} + x^2 - y^2 - e(x+1) + 1 = 0$ define y como uma função C^1 de x numa vizinhança de $(x,y) = (0,-1)$. Calcule $y^{'}(0)$.

4. Considere a linha $L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2 \; ; \; z = 2 \; ; \; x^2 + z^2 \leq 5 \; ; \; x > 0\}$.

[2.0] a) Parametrize L.

[1.0] b) Determine a massa de L sabendo que a respectiva densidade de massa é dada pela função $\sigma(x,y,z) = \sqrt{1+4x^2}$.

[2.0] 5. Use o teorema de Green para calcular o trabalho realizado pelo seguinte campo vetorial $F(x,y) = (-y, 5x)$ ao longo do segmento de recta entre o ponto $(0,2)$ e o ponto $(1,0)$.

[2.0] 6. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \; ; \; z < 1\}$$

e o campo vetorial

$$F(x,y,z) = \left(1 - xz^3, y(z^3 - 3), 3z\right).$$

Usando o teorema da divergência, calcule o fluxo de F através de S segundo a normal com terceira componente positiva.

[2.0] 7. Use o teorema de Stokes para calcular o trabalho realizado pelo campo vetorial

$$F(x,y,z) = (y, z - 2x, y - z^2)$$

ao longo da linha dada pelas equações $x^2 + y^2 = 1 \; ; \; z = 1 - y$, num sentido à sua escolha.

[3.0] 8. Considere o campo vetorial $F(x,y) = (-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2})$ e um campo vetorial G fechado, definido e de classe C^1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Mostre que existe $a \in \mathbb{R}$ e um campo escalar ϕ tal que $G = aF + \nabla\phi$.