Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Exame/Teste de Recuperação - 30 de Junho de 2014
Duração: Exame (3h), Teste (1h30) - v2 - 8h

Apresente e justifique todos os cálculos

Teste 1

1. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} y\cos(\frac{2\pi y^2}{x^2+y^2}), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[2.0] a) Determine o conjunto de pontos em que g é contínua.

[3.0] b) Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$ e verifique se a função g é diferenciável na origem.

[2.0] 2. Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável na origem e tal que

$$h(2t, 3t) = t^2 + t, \quad h(t, t^2) = 3t.$$

Calcule $D_v h(0,0)$ em que $v = (1,3)$.

[3.0] 3. Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x,y,z) = xy + x^2 - y^2 + yz^2$.

4. Considere o conjunto

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z < 1\,;\ \sqrt{x^2+y^2}+z > 1\,;\ x > 0\,;\ y > 0\,;\ z > 0\}.$$

[3.0] a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

[4.0] b) Calcule o volume de V.

[3.0] 5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 cujas derivadas de segunda ordem satisfazem a condição

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > \sqrt{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2} \tag{1}$$

em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

a) Mostre que f não tem máximo em $\mathbb{R}^2$.

b) Dê um exemplo de uma função de classe C^2 que satisfaz a condição (1) e tem um ponto crítico.

Teste 2

1. Considere o conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \; ; \; y + z = 1\}.$$

[2.0] a) Mostre que M é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

[2.0] b) Determine o espaço tangente a M no ponto $(1, 0, 1)$.

[2.0] c) Determine o ponto de M que apresenta menor coordenada z.

[2.0] 2. Mostre que a equação $\cos(x + y + z) + xyz = 1$ define x como função de (y, z), de classe C^2, numa vizinhança do ponto $(0, 1, -1)$. Calcule $\dfrac{\partial^2 x}{\partial z \partial y}(1, -1)$.

3. Considere o campo vectorial $F(x, y) = \left(y + x - \dfrac{y+1}{x^2 + (y+1)^2}, -3x + y + \dfrac{x}{x^2 + (y+1)^2} \right)$.

[1.0] a) Mostre que F não é conservativo no seu domínio.

[2.0] b) Calcule o trabalho do campo F ao longo da fronteira do conjunto definido pela inequação $|x| + |y| < 2$, percorrida no sentido horário.

4. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\},$$

orientada segundo a normal unitária n tal que $n_z > 0$.

[2.0] a) Calcule a área de S.

[2.0] b) Calcule o fluxo do campo vectorial $F(x, y, z) = (x(\beta(z) - 1), -y\beta(z), 1 + z)$ através de S no sentido da normal n, sendo $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1.

[2.0] c) Usando o teorema de Stokes, calcule o trabalho do campo vectorial

$$G(x, y, z) = (yz, x + y, xz + y)$$

ao longo de ∂S percorrido no sentido horário quando visto do ponto $(0, 0, 10)$.

[3.0] 5. Considere a variedade $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1; z > 0\}$, seja $P = (0, 0, 1)$ e Q um ponto de M distinto de P.

Determine a curva $\Gamma \subset M$ de menor comprimento que liga o ponto P ao ponto Q.

(**Sugestão**: sem perda de generalidade, considere o ponto Q no plano $y = 0$. Parametrize as curvas que ligam o ponto P ao ponto Q em função de dois ângulos $\theta(t)$ e $\varphi(t)$, como nas coordenadas esféricas. Verifique que Γ está contida no plano $y = 0$.)