Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Exame/Teste de Recuperação - 30 de Junho de 2014 - v2 - 15h
Duração: Exame (3h), Teste (1h30)

Apresente e justifique todos os cálculos

Teste 1

1. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

[2.0] a) Determine se g é contínua na origem.

[3.0] b) Calcule a derivada $D_v g(0,0)$, sendo $v = (a,b)$ um vector não nulo. Verifique se g é diferenciável na origem.

[2.0] 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e

$$g(x,y) = f(2xy, x^2 - y^2).$$

Deduza uma expressão para $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1,1)$ em função de derivadas parciais de primeira e segunda ordem de f calculadas num ponto adequado.

[3.0] 3. Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x,y) = -ye^{-x^2-y^2}$.

4. Considere o conjunto

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 < z + 4 < 6 - \sqrt{\frac{x^2}{4} + y^2}\ \}.$$

[3.0] a) Deduza uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dy)dx)dz$.

[4.0] b) Calcule o volume de V.

[3.0] 5. Seja

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < 1\}$$

e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 que verifica as condições:

$$f(x) = 0, \text{ se } x \in \partial B\,,$$
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x) > 0, \text{ se } x \in B\,.$$

Calcule, justificando, o supremo de f em B.

Teste 2

1. Seja $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + xy + y^2 - xz + z^2 = 1\}$.

[2.0] a) Determine se M é uma variedade e, em caso afirmativo, a respectiva dimensão.

[2.0] b) Determine o conjunto dos pontos em que o vector $(2,3,1)$ é tangente a M.

[2.0] c) Sabendo que M é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ fechado e limitado, determine os valores máximo e mínimo da restrição a M da função $f(x,y,z) = z$.

[2.0] 2. Mostre que o sistema

$$\begin{cases} (y + e^x)z + \ln(y - z) = 3 \\ xy^2 + z = 1 \end{cases}$$

define y e z como funções de x numa vizinhança do ponto $(0,2,1)$. Calcule $y'(0)$ e $z'(0)$.

[1.0] 3. a) Determine um potencial escalar do campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por

$$F(x,y) = \big(2xy\,,\, 2 + x^2\big)\,.$$

[2.0] b) Calcule o trabalho do campo vectorial $H : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$, definido por

$$H(x,y) = (2xy - \frac{y}{x^2+y^2}, 2 + x^2 + \frac{x}{x^2+y^2}),$$

ao longo do caminho $g(t) = (1 - t^2\,,\, t^2 + t - 1)\,$, com $t \in [-1,1]$.

4. Considere o campo vectorial $F(x,y,z) = (\frac{x}{x^2+y^2}\,,\, \frac{y}{x^2+y^2}\,,\, xy)$.

[1.0] a) Calcule o fluxo do campo F através da superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,;\, -1 < z < 1\},$$

no sentido da normal unitária n tal que $n(0,1,\frac{1}{2}) = (0,-1,0)$.

[2.0] b) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo do campo F através da superfície

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2\,;\, -1 < z < 1\},$$

no sentido da normal unitária n tal que $n(0,-\sqrt{2},0) = (0,1,0)$.

5. Considere a superfície $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2\,;\, x > 0\,;\, z > 0\}$, e o campo vectorial $G(x,y,z) = (0,-y,z)$.

[1.0] a) Determine um potencial vectorial do campo G com segunda componente nula.

[2.0] b) Calcule o fluxo de G através de T no sentido da normal unitária com terceira componente positiva.

[3.0] 6. Considere a variedade $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z\}$, seja $P = (0,0,0)$ e Q um ponto de M distinto de P.

Determine a curva $\Gamma \subset M$ de menor comprimento que liga o ponto P ao ponto Q.

(**Sugestão**: sem perda de generalidade, considere o ponto Q no plano $y = 0$. Parametrize as curvas que ligam o ponto P ao ponto Q em função de um ângulo $\theta(t)$ e da distância ao eixo Oz, $\rho(t)$, como nas coordenadas cilíndricas. Verifique que Γ está contida no plano $y = 0$.)