

Cálculo Diferencial e Integral II
Exame/Teste de Recuperação - 30 de Junho de 2014 - v1 - 15h
Duração: Exame (3h), Teste (1h30)

Apresente e justifique todos os cálculos

Teste 1

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^4 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

[2.0] a) Determine se f é contínua na origem.

[3.0] b) Calcule a derivada $D_v f(0, 0)$, sendo $v = (a, b)$ um vector não nulo. Verifique se f é diferenciável na origem.

[2.0] 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e

$$g(x, y) = f(x^2 - y^2, 2xy).$$

Deduz a expressão para $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1, 1)$ em função de derivadas parciais de primeira e segunda ordem de f calculadas num ponto adequado.

[3.0] 3. Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$.

4. Considere o conjunto

$$U = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} < z + 4 < 6 - \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}} \right\}.$$

[3.0] a) Deduz a expressão para o volume de U em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dy)dx)dz$.

[4.0] b) Calcule o volume de U .

[3.0] 5. Seja

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$$

e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 que verifica as condições:

$$f(x) = 0, \text{ se } x \in \partial B, \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x) > 0, \text{ se } x \in B.$$

Calcule, justificando, o supremo de f em B .

Teste 2

1. Seja $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - xy + y^2 + xz + z^2 = 1\}$.

[2.0] a) Determine se M é uma variedade e, em caso afirmativo, a respectiva dimensão.

[2.0] b) Determine o conjunto dos pontos em que o vector $(2, 1, -1)$ é tangente a M .

[2.0] c) Sabendo que M é um subconjunto de \mathbb{R}^3 fechado e limitado, determine os valores máximo e mínimo da restrição a M da função $f(x, y, z) = y$.

[2.0] 2. Mostre que o sistema

$$\begin{cases} (x + e^y)z + \ln(x - z) = 3 \\ x^2y + z = 1 \end{cases}$$

define x e y como funções de z numa vizinhança do ponto $(2, 0, 1)$. Calcule $x'(1)$ e $y'(1)$.

[1.0] 3. a) Determine um potencial escalar do campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido por

$$F(x, y) = (y^2, 1 + 2xy).$$

[2.0] b) Calcule o trabalho do campo vectorial $H : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido por

$$H(x, y) = \left(y^2 - \frac{y}{x^2 + y^2}, 1 + 2xy + \frac{x}{x^2 + y^2}\right),$$

ao longo do caminho $g(t) = (1 - t^2, t^2 + t - 1)$, com $t \in [-1, 1]$.

4. Considere o campo vectorial $F(x, y, z) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}, 1\right)$.

[1.0] a) Calcule o fluxo do campo F através da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1; -1 < z < 1\},$$

no sentido da normal unitária n tal que $n(0, 1, \frac{1}{2}) = (0, -1, 0)$.

[2.0] b) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo do campo F através da superfície

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2; -1 < z < 1\},$$

no sentido da normal unitária n tal que $n(0, \sqrt{2}, 0) = (0, 1, 0)$.

5. Considere a superfície $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2; y > 0; z > 0\}$, e o campo vectorial $G(x, y, z) = (x, 0, -z)$.

[1.0] a) Determine um potencial vectorial do campo G com primeira componente nula.

[2.0] b) Calcule o fluxo de G através de T no sentido da normal unitária com terceira componente positiva.

[3.0] 6. Considere a variedade $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z\}$, seja $P = (0, 0, 0)$ e Q um ponto de M distinto de P .

Determine a curva $\Gamma \subset M$ de menor comprimento que liga o ponto P ao ponto Q .

(**Sugestão:** sem perda de generalidade, considere o ponto Q no plano $y = 0$. Parametrize as curvas que ligam o ponto P ao ponto Q em função de um ângulo $\theta(t)$ e da distância ao eixo Oz , $\rho(t)$, como nas coordenadas cilíndricas. Verifique que Γ está contida no plano $y = 0$.)