Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste de Recuperação/Exame (versão 1) - 28 de Janeiro de 2013
Duração: 1h30(Teste), 3h00(Exame)

Apresente e justifique todos os cálculos

Teste 1

(1.5 val.) 1. Considere a função

$$f(x,y) = \cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) .$$

Calcule, ou mostre que não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(1.5 val.) 2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $g(0,0) = 2$ e $Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$ e seja $f(t) = (t, t^2+1)$. Determine $D(f \circ g)(0,0)$.

(2 val.) 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = xy + 2x + e^{-z^2}$.

(1 val.) 4. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{2y}{x} e^{xy}$ e o conjunto

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\, y > 0,\, 1 < xy < 2,\, 1 < \frac{y}{x} < 3\}.$$

Calcule $\displaystyle\int_S f$, utilizando uma mudança de variáveis apropriada.

5. Seja $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 2 - \sqrt{x^2+y^2},\, x^2+y^2 < 1,\, x > 0,\, y > 0\}$.

(1 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de A na forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(1.5 val.) b) Calcule o volume de A.

(1.5 val.) 6. Mostre que uma função vectorial é diferenciável se e só se cada uma das suas funções coordenadas for diferenciável.

Teste 2

7. Considere o conjunto $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2,\ y + z = 1\}$.

(1 val.) a) Mostre que M é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

(1 val.) b) Determine o espaço normal a M no ponto $(0,0,1)$.

(1 val.) c) Determine os extremos da função $f(x,y,z) = x$ no conjunto M.

(1.5 val.) 8. Mostre que a equação

$$z + \log(x + x^2 + y^2 + z^2) = 1$$

define a variável z como função das variáveis x e y em alguma vizinhança do ponto $(x,y,z) = (0,0,1)$ e calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0)$.

9. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = 1 - x^2 - y^2,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}.$$

(0.5 val.) a) Parametrize a superfície S.

(1 val.) b) Calcule a área de S.

(1 val.) c) Considere o campo vectorial $F(x,y,z) = (-y, x, z)$ e calcule o trabalho

$$\int_{\partial S} F \cdot dg$$

no sentido horário quando visto do ponto $(0,0,10)$, usando o Teorema de Stokes.

(1.5 val.) d) Determine o fluxo de

$$G(x,y,z) = (x, -y^4 - y, 4y^3 z + 2)$$

através de S no sentido da normal com terceira componente positiva, usando o Teorema da Divergência.

(1.5 val.) 10. Demonstre o Teorema da Função Implícita usando o Teorema da Função Inversa.