Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Exame/Teste de Recuperação v2 - 8h - 29 de Junho de 2015
Duração: Teste - 1h30m; Exame - 3h

Apresente e justifique todos os cálculos

Resolução abreviada

Teste 1

1. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy^2 - x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

[1.0] a) Verifique se g é contínua na origem.

Resolução:
É contínua, pois

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq \ |g(x,y) - g(0,0)| = \left| \frac{4xy^2 - x^2y}{x^2+y^2} \right| \leq \left| \frac{4xy^2}{x^2+y^2} \right| + \left| \frac{x^2y}{x^2+y^2} \right| \\ &= \ 4|x| \left| \frac{y^2}{x^2+y^2} \right| + |y| \left| \frac{x^2}{x^2+y^2} \right| \leq 4|x| + |y| \to 0 \ . \end{aligned}$$

[1.0] b) Calcule, caso existam, as derivadas de g no ponto $(0,0)$ segundo os vetores $(4,1)$, $(0,1)$ e $(1,-1)$. Que pode concluir quanto à diferenciabilidade de g na origem?

Resolução:
Seja $v = (a,b)$. Então

$$\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) = \frac{d}{dt} g((0,0) + tv)|_{t=0} = \frac{d}{dt} g(at,bt)|_{t=0} \ .$$

Como $g(4t,t) = g(0,t) = 0$ para qualquer t resulta que para $v = (4,1)$ e $v = (0,1)$ tem-se $\partial g/\partial v = 0$. Por outro lado tem-se $g(t,-t) = 5t/2$ para qualquer t, pelo que $\partial g/\partial v = 5/2$ se $v = (1,-1)$. Isto implica que g não é diferenciável, pois o vector $(1,-1)$ é combinação linear de $(4,1)$ e $(0,1)$ e a diferenciabilidade implicaria que também com $v = (1,-1)$ se devia ter $\partial g/\partial v = 0$ (pois havendo diferenciabilidade tem-se $\partial g/\partial v(0,0) = Dg(0,0)v$).

[1.5] 2. Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciável no ponto $(-1,1)$ tal que $\frac{\partial h}{\partial y}(-1,1) = (-1,1,1)$ e considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x) = (x^2 - 1, \mathrm{e}^{-x})$. Sendo $\psi = h \circ f$, determine a derivada de ψ na origem.

Resolução:

$$\frac{d\psi}{dx}(0) = Dh(f(0))Df(0) = \begin{bmatrix} \vdots & -1 \\ \vdots & 1 \\ \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ .$$

[1.0] 3. Determine e classifique os pontos críticos da função $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $G(x, y) = 5x^2 + 10y^2 + 3xy - 7x + 17y$.

Resolução:

Tem-se $DG = 0$ *se e só se* $10x + 3y - 7 = 0$ *e* $3x + 20y + 17 = 0$. *Este sistema tem como solução o único ponto crítico* $(1, -1)$, *no qual se tem* $D^2G(1, -1) = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 20 \end{bmatrix}$. *Esta matriz é definida positiva e por isso o ponto é de mínimo.*

[2.0] 4. Considere o conjunto definido por

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq x \leq 2\,;\, 0 \leq y \leq 1\,;\, \frac{x}{2} \leq y \leq x\,;\, 0 \leq z \leq 2x + y\}.$$

Calcule o volume de A usando integrais iterados da forma $\int\int\int dzdydx$.

Resolução:

$$V_3(A) = \int_0^1 \int_{x/2}^{x} \int_0^{2x+y} 1\ dzdydx + \int_1^2 \int_{x/2}^{1} \int_0^{2x+y} 1\ dzdydx = 4/3\ .$$

5. Considere o sólido definido por

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq y \leq x\,;\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\,;\, z \geq 0\}.$$

Seja $f(x, y, z) = 3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ a densidade de massa do sólido.

[1.0] a) Escreva uma expressão para a massa total de B usando coordenadas cilíndricas.

Resolução:

$$M = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-z^2}} 3\rho\sqrt{\rho^2 + z^2}\ d\rho dz d\varphi\ .$$

[1.0] b) Calcule a massa total de B usando coordenadas esféricas.

Resolução:

$$M = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} 3r^3 \operatorname{sen}\theta\ dr d\theta d\varphi = 3\pi/4\ .$$

[1.5] 6. Diz-se que $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função homogénea de grau $\alpha \in \mathbb{R}$ se, para quaisquer $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}_+$, se verifica

$$\phi(tx) = t^\alpha \phi(x).$$

Sendo ϕ uma função homogénea e de classe C^2 com $\alpha \geq 2$:

- Prove que $D_u\phi(u) = \alpha\phi(u)$, para qualquer $u \in \mathbb{R}^n$.

  Resolução:

$$D_u\phi(u) = \frac{d}{dt}\phi(u + tu)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left[(t + 1)^\alpha \phi(u)\right]|_{t=0} = \alpha\phi(u)\ .$$

- Prove que $u^T Hu = \alpha(\alpha - 1)\phi(u)$, em que H é a matriz hesseana de ϕ no ponto u.

  Resolução:

$$u^T Hu = \frac{d^2}{dt^2}\phi(u + tu)|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2}\left[(t + 1)^\alpha \phi(u)\right]|_{t=0} = \alpha(\alpha - 1)\phi(u)\ .$$

Teste 2

1. Seja $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 3x^2y + y^3 + z^2 = 1\,;\, x+y=1\}$.

[1.0] a) Mostre que M é uma variedade indicando a sua dimensão.

Resolução:

Seja $F = (3x^2y + y^3 + z^2 - 1, x+y-1)$. Esta função é de classe C^1 e $M = F^{-1}(0)$. Além disso

$$DF = \begin{bmatrix} 6xy & 3x^2+3y^2 & 2z \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

só tem caraterística menor que 2 se $z=0$ e $6xy = 3x^2+3y^2$, mas estes pontos não pertencem a M. Por isso M é uma variedade cuja dimensão é a dimensão de $\mathbb{R}^3$ menos a característica de DF, ou seja, 1.

[1.0] b) Determine a reta tangente e o plano perpendicular a M no ponto $(1,0,1)$.

Resolução:

O espaço tangente $T_{(1,0,1)}M$ é o núcleo de $DF(1,0,1)$, que é gerado pelo vector $(2,-2,3)$, e o espaço normal $N_{(1,0,1)}M$ é o espaço das linhas de $DF(1,0,1)$. A recta tangente e o plano normal são respectivamente $(1,0,1)+T_{(1,0,1)}M$ e $(1,0,1)+N_{(1,0,1)}M$. Portanto a recta tangente é

$$\{(1+2t, -2t, 1+3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

e o plano normal é

$$\{(1+\lambda, 3\kappa+\lambda, 1+2\kappa) \mid \kappa, \lambda \in \mathbb{R}\}\ .$$

[1.0] c) Mostre que numa vizinhança de $(1,0,1)$, M é o gráfico de uma função de y, ou seja, $(x,z) = f(y)$, e determine $\dfrac{dx}{dy}(0)$.

Resolução:

A matriz quadrada contida em $DF(1,0,1)$ que contém as derivadas parciais em ordem a x e z é $D_{xz}F = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e é não-singular. Como F é de classe C^1 resulta que a condição $F(x,y,z)=0$ é equivalente a $(x,z)=f(y)$ numa vizinhança de $y=0$ para alguma função f de classe C^1 e tem-se

$$Df(0) = -\left(DF_{xz}(1,0,1)\right)^{-1} D_yF(1,0,1) = \begin{bmatrix} -1 \\ -3/2 \end{bmatrix}\ ,$$

pelo que $\frac{dx}{dy}(0) = -1$.

[1.0] d) Determine se a função $f(x,y,z) = 3x$ tem ou não máximo absoluto em M.

Resolução:

Aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange obtemos $(0,1,0)$ como único candidato a ponto de extremo condicionado de f em M. Neste ponto f tem o valor 0, mas o ponto $(1,0,1)$ também pertence a M e neste f tem o valor 3, que é superior. Logo, f não tem máximo absoluto em M.

[1.0] 2. Considere a linha

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,;\; z = x^2 - y^2\}$$

e o campo escalar $\phi(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 16x^2y^2}}$.

Parametrize a linha L e calcule o integral $\displaystyle\int_L \phi$.

Resolução:

Uma parametrização é $g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t)$ *com* $t \in \,]0, 2\pi[$ *e*

$$\int_L \phi = \int_0^{2\pi} \phi(g(t))||g'(t)||dt = \int_0^{2\pi} 1 = 2\pi\ .$$

[1.0] 3. Considere o campo vetorial

$$F(x, y) = \Big(-\frac{y}{x^2 + y^2} + 1\,,\; \frac{x}{x^2 + y^2} + 2y\Big)$$

e a linha L definida por

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + y^2 = 1\}$$

e percorrida no sentido horário.

Calcule o trabalho realizado por F ao longo da linha L.

Resolução:

Temos $F = G + H$ *onde* $G = \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x)$ *e* $H = (1, 2y)$. *O campo* G *é o "ralo da banheira" centrado na origem e* H *é o gradiente de* $\phi(x, y) = x + y^2$. *Como a curva dá uma volta à origem no sentido negativo o trabalho é*

$$W = \oint_L F \cdot dg = \oint_L G \cdot dg + \oint_L H \cdot dg = -2\pi + 0 = -2\pi\ .$$

[1.5] 4. Calcule o fluxo do campo vetorial $F(x, y, z) = (2y, -2x, 3)$ através da superfície

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 1\,;\; x^2 + y^2 < 1\}$$

segundo a normal com terceira componente positiva, usando o teorema da divergência.

Resolução:

Seja $D = \{(x, y, z) : x + z < 1;\; x^2 + y^2 < 1;\; z > 0\}$. *Pelo teorema da divergência temos*

$$\int_{\partial D} F \cdot n = \int_D \nabla \cdot F = 0\ ,$$

em que n *é a normal exterior. O campo* F *é tangente à superfície cilíndrica*

$$S = \{(x, y, z) : x + z < 1;\; x^2 + y^2 = 1;\; z > 0\}\ ,$$

pelo que o seu fluxo através de S é nulo. A “base” de D é o disco

$$T = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1;\ z = 0\} ,$$

e em T tem-se $\int_T F \cdot n = -\int_T 3 = -3\pi$. Logo,

$$\int_B F \cdot n = \int_{\partial D} F \cdot n - \int_S F \cdot n - \int_T F \cdot n = 3\pi .$$

[1.0] 5. Seja $A \subset \mathbb{R}^3$ a superfície definida por $z = x^2 + y^2 - 1$; $z < 0$ e considere o campo vetorial $H(x, y, z) = (y, -x, z^2 - xy)$.

Use o teorema de Stokes para calcular o fluxo do rotacional de H através da superfície A segundo a normal com terceira componente negativa.

Resolução:

O bordo ∂A, com o sentido induzido pela normal, é parametrizado por $g(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$ com $t \in [0, 2\pi]$. Logo, usando o Teorema de Stokes temos

$$\int_A \nabla \times H \cdot n = \oint_{\partial A} H \cdot dg = \int_0^{2\pi} H(g(t)) \cdot g'(t)dt = \int_0^{2\pi} 1 = 2\pi .$$

[1.5] 6. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade compacta de dimensão maior do que zero e $v \in \mathbb{R}^n$ um vetor não nulo. Mostre que existem pelo menos dois pontos $x \in M$ tais que v é perpendicular a M em x.

Resolução:

Seja $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função definida por $\phi(x) = x \cdot v$. Então $\nabla\phi = v$. Como ϕ é contínua, pelo Teorema de Weierstrass concluímos que existem máximo e mínimo absoluto de ϕ em M. Em cada ponto de extremo condicionado x tem-se $v = \nabla\phi(x) \in N_xM$ e por isso existem pelo menos dois pontos x, correspondentes respectivamente a um máximo e a um mínimo, tais que $v \in N_xM$.