Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Exame/Teste de Recuperação - v2 - 15h - 29 de Junho de 2015

Duração: Teste - 1h30m; Exame - 3h

Apresente e justifique todos os cálculos

Teste 1

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

[1.0] a) Verifique se g é contínua na origem. O que pode concluir quanto à diferenciabilidade de g na origem?

[1.0] b) Calcule, caso existam, a derivada de g no ponto $(0,0)$ segundo o vetor $(2,1)$ e a derivada de g no ponto $(0,1)$ segundo o vetor $(1,-1)$.

[1.5] 2. Seja $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que a sua derivada no ponto $(1,1,1)$ segundo o vetor $(-2,0,2)$ é igual a -2. Seja ainda, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $f(x,y) = h(x+y, y^2, y-x)$. Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)$.

[1.0] 3. Determine e classifique os pontos críticos da função $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $G(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - 5xy - x - y$.

[2.0] 4. Considere o conjunto definido por

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq x \leq 2\,;\, 0 \leq y \leq 1\,;\, 0 \leq z \leq 1\,;\, x + 2y + 2z \leq 4\}.$$

Escreva uma expressão para o volume de A em termos de integrais iterados numa ordem à sua escolha.

[2.0] 5. Determine a coordenada y do centróide do sólido

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 < x^2 + z^2 < 2\,;\, x^2 + y^2 + z^2 < 5\,;\, y > 0\}.$$

[1.5] 6. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado tal que a função constante igual a um é integrável em D. Prove que, se $\phi : D \to \mathbb{R}$ for uma função limitada e integrável em D, então existe um $\lambda \in [\inf \phi, \sup \phi]$ tal que

$$\int_D \phi = \lambda \int_D 1.$$

Prove ainda que se, adicionalmente, ϕ for contínua e D for conexo existe $c \in D$ tal que

$$\int_D \phi = \phi(c) \int_D 1.$$

Teste 2

1. Seja $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^3 + y^2 + xz^2 = 2\}$.

[1.0] a) Mostre que M é uma variedade indicando a sua dimensão.

[1.0] b) Determine a reta perpendicular e o plano tangente a M no ponto $(1,0,1)$.

[1.0] c) Determine se a função $f(x,y,z) = e^{3y}$ tem ou não máximo absoluto em M.

[1.0] 2. Mostre que a função $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$(u,v) = f(x,y) = (x^2 + y^2, x - y),$$

é invertível numa vizinhança do ponto $(1,0)$ e calcule $Df^{-1}(1,1)$ e $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}(1,1)$.

[1.5] 3. Calcule o trabalho realizado pelo campo vetorial

$$F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

ao longo do segmento de reta que vai do ponto $(2,0)$ ao ponto $(0,2)$.

[1.5] 4. Considere a superfície S definida por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - x^2 - y^2 \,;\, 0 < z < 1\}$$

e o campo vetorial $F(x,y,z) = (2x, 2y, -4z)$.

Calcule o fluxo de F através de S segundo a normal com terceira componente positiva, usando o teorema da divergência.

[1.5] 5. Seja L a linha definida por

$$L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + z = 1 \,;\, x^2 + y^2 = 1\}$$

e percorrida no sentido anti-horário quando vista do ponto $(0,0,100)$.

Calcule o trabalho realizado pelo campo vetorial $H(x,y,z) = (x + 2y + z, 2x - y, 3y - z)$ ao longo da linha L, usando o teorema de Stokes.

[1.5] 6. Seja $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + z^2 \neq 0 \,;\, y^2 + z^2 \neq 0 \,;\, x^2 + y^2 \neq 0\}$, e $F \colon U \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^1 e fechado.

Explique como calcular o trabalho de F ao longo do caminho parametrizado por

$$g(\theta) = (\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

em termos do trabalho de F ao longo de circunferências contidas em planos perpendiculares aos eixos coordenados.