Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Exame/Teste de Recuperação v1 - 8h - 29 de Junho de 2015
Duração: Teste - 1h30m; Exame - 3h

Apresente e justifique todos os cálculos

Teste 1

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y-3xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

[1.0] a) Verifique se f é contínua na origem.

[1.0] b) Calcule, caso existam, as derivadas de f no ponto $(0,0)$ segundo os vetores $(3,2)$, $(1,0)$ e $(1,1)$. Que pode concluir quanto à diferenciabilidade de f na origem?

[1.5] 2. Sejam $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciável no ponto $(1,1)$ tal que $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = (1,2,1)$ e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $h(x) = (\mathrm{e}^x, x^2+1)$. Sendo $\varphi = g \circ h$, determine a derivada de φ na origem.

[1.0] 3. Determine e classifique os pontos críticos da função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x,y) = 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 18x - 8y$.

[2.0] 4. Considere o conjunto definido por

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq x \leq 1\,;\, 0 \leq y \leq 1\,;\, \frac{x}{2} \leq y \leq 2x\,;\, 0 \leq z \leq x+y\}.$$

Calcule o volume de A usando integrais iterados da forma $\int\int\int dzdxdy$.

5. Considere o sólido definido por

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \geq 0\,;\, y \geq x\,;\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}.$$

Seja $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ a densidade de massa do sólido.

[1.0] a) Escreva uma expressão para a massa total de B usando coordenadas cilíndricas.

[1.0] b) Calcule a massa total de B usando coordenadas esféricas.

[1.5] 6. Diz-se que $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função homogénea de grau $\alpha \in \mathbb{R}$ se, para quaisquer $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}_+$, se verifica

$$\phi(tx) = t^\alpha \phi(x).$$

Sendo ϕ uma função homogénea e de classe C^2 com $\alpha \geq 2$:

- Prove que $D_u\phi(u) = \alpha\phi(u)$, para qualquer $u \in \mathbb{R}^n$.
- Prove que $u^T H u = \alpha(\alpha-1)\phi(u)$, em que H é a matriz hesseana de ϕ no ponto u.

Teste 2

1. Seja $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 3x^2z + y^2 + z^3 = 1\,;\, x + z = 1\}$.

[1.0] a) Mostre que M é uma variedade indicando a sua dimensão.

[1.0] b) Determine a reta tangente e o plano perpendicular a M no ponto $(1, 1, 0)$.

[1.0] c) Mostre que numa vizinhança de $(1, 1, 0)$, M é o gráfico de uma função de z, ou seja, $(x, y) = f(z)$, e determine $\dfrac{dx}{dz}(0)$.

[1.0] d) Determine se a função $f(x, y, z) = x$ tem ou não máximo absoluto em M.

[1.0] 2. Considere a linha

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,;\, z = 2xy\}$$

e o campo escalar $\phi(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 4(x^2 - y^2)^2}}$.

Parametrize a linha L e calcule o integral $\displaystyle\int_L \phi$.

[1.0] 3. Considere o campo vetorial

$$F(x, y) = \Big(\frac{y}{x^2 + y^2} + 2x\,,\, -\frac{x}{x^2 + y^2} + 1\Big)$$

e a linha L definida por

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\}$$

e percorrida no sentido horário.

Calcule o trabalho realizado por F ao longo da linha L.

[1.5] 4. Calcule o fluxo do campo vetorial $F(x, y, z) = (-y, x, 1)$ através da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 1\,;\, x^2 + y^2 < 1\}$$

segundo a normal com terceira componente positiva, usando o teorema da divergência.

[1.0] 5. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ a superfície definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1\,;\, z > 0$ e considere o campo vetorial $H(x, y, z) = (-y, x, xy + z)$.

Use o teorema de Stokes para calcular o fluxo do rotacional de H através da superfície S segundo a normal com terceira componente negativa.

[1.5] 6. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade compacta de dimensão maior do que zero e $v \in \mathbb{R}^n$ um vetor não nulo. Mostre que existem pelo menos dois pontos $x \in M$ tais que v é perpendicular a M em x.