

Cálculo Diferencial e Integral II

Exame/Teste de Recuperação - v2 - 29 de Janeiro de 2019

Duração: Teste - 1h30m, Exame - 3h

Teste 1

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

[2.0] a) Determine o conjunto de pontos em que a função f é contínua.

[2.0] b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e mostre que f não é diferenciável na origem.

[3.0] 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $f(0, 1) = 1$ e $\nabla f(0, 1) = [3 \ 2]$. Considere a função $h(x, y) = f(xy, f(x, y))$.

Calcule a derivada $Dh(0, 1)$.

[3.0] 3. Determine e classifique os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = 2x^3 + 3x^2y + 3y - y^3.$$

[2.0] 4. Mostre que a função $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $g(x, y) = (y - x, x + y)$ é uma mudança de variáveis e use-a para calcular a área do conjunto

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x + y < 3; x < y < x + 1\}.$$

5. Considere o conjunto

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z < 1; y + z < 1; x > 0; y > 0; z > 0\}.$$

Escreva uma expressão para o volume de B em termos de integrais iterados da forma:

[1.0] a) $\int(\int(\int dy)dx)dz,$

[2.0] b) $\int(\int(\int dz)dx)dy.$

[2.0] 6. Calcule $\int_V f$ em que $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < z < 2 - x^2 - y^2; x > 0; y > 0\},$$

usando coordenadas cilíndricas.

[3.0] 7. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 que satisfaz a identidade

$$x \cdot \nabla f(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Mostre que f satisfaz a igualdade

$$f(tx) = tf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \geq 0.$$

Cálculo Diferencial e Integral II
Exame/Teste de Recuperação - v2 - 29 de Janeiro de 2019
Duração: Teste - 1h30m, Exame - 3h

Teste 2

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y + 1)^4 - xz = 0, y > -1\}$.

[2.0] a) Mostre que o conjunto M é uma variedade e determine a sua dimensão.

[2.0] b) Determine a equação da reta normal a M em $(1, -2, 1)$.

- [2.0] 2. Mostre que a equação

$$\operatorname{sen}(xyz) + x^2 - z^3 + y^3 = \pi^2,$$

define, nalguma vizinhança do ponto $(\pi, 1, 1)$, y como função de classe C^1 de x, z . Calcule $\frac{dy}{dx}(\pi, 1)$.

- [2.0] 3. Considere a curva

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2, x + y + z = 1\}.$$

Determine o valor mínimo da coordenada y em C .

4. Considere o campo $F(x, y, z) = \left(-\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+z^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{z}{x^2+z^2}\right)$.

[2.0] a) Determine se F é fechado.

[2.0] b) Determine se F é um gradiente no seu domínio.

- [3.0] 5. Calcule o fluxo de

$$F(x, y, z) = (\cos z - 2xy, y(y - 1), e^{\operatorname{sen}(xy)}),$$

através da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = (\sqrt{x^2 + z^2})^{\frac{1}{2}} - 1, 0 < y < 1\},$$

no sentido da normal unitária \mathbf{n} tal que $n_2 < 0$.

- [2.0] 6. Use o Teorema de Stokes para calcular o trabalho de $F(x, y, z) = (-xy, 0, x - yz)$ ao longo do bordo da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1, 0 < y < 1\},$$

com a orientação induzida uma normal unitária à sua escolha.

- [3.0] 7. Seja $F: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^1 tal que F é fechado. Mostre que existe uma função $\varphi: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , e uma contante $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que

$$F = \nabla\varphi + \lambda f,$$

onde $f(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$.