Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Exame/Teste de Recuperação - v1 - 29 de Janeiro de 2019
Duração: Teste - 1h30m, Exame - 3h

Teste 1

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[2.0] a) Determine o conjunto de pontos em que a função f é contínua.

[2.0] b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ e mostre que f não é diferenciável na origem.

[3.0] 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $f(1,0) = 1$ e $\nabla f(1,0) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$. Considere a função $h(x,y) = f(f(x,y), xy)$.

Calcule a derivada $Dh(1,0)$.

[3.0] 3. Determine e classifique os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = x^3 - 3x - 3xy^2 - 2y^3.$$

[2.0] 4. Mostre que a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $g(x,y) = (x+y, y-x)$ é uma mudança de variáveis e use-a para calcular a área do conjunto

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y < 1 + x\,;\, 1 < x + y < 2\}.$$

5. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + z < 1\,;\, y + z < 1\,;\, x > 0\,;\, y > 0\,;\, z > 0\}.$$

Escreva uma expressão para o volume de A em termos de integrais iterados da forma:

[1.0] a) $\int(\int(\int dx)dy)dz$,

[2.0] b) $\int(\int(\int dz)dy)dx$.

[2.0] 6. Calcule $\int_V f$ em que $f(x,y,z) = z$ e

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} < z < \sqrt{2 - x^2 - y^2}\,;\, y > 0\},$$

usando coordenadas cilíndricas.

[3.0] 7. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 que satisfaz a identidade

$$x \cdot \nabla f(x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Mostre que f satisfaz a igualdade

$$f(tx) = tf(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall t \geq 0.$$

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Exame/Teste de Recuperação - v1 - 29 de Janeiro de 2019
Duração: Teste - 1h30m, Exame - 3h

Teste 2

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^3 - yz = 0,\ x > 1\}$.

[2.0] a) Mostre que o conjunto M é uma variedade e determine a sua dimensão.

[2.0] b) Determine a equação da reta normal a M em $(2,1,1)$.

[2.0] 2. Mostre que a equação
$$\cos(xyz) + x^2 - z^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{4}$$
define, em alguma vizinhança do ponto $(1, \frac{\pi}{2}, 1)$, x como função de classe C^1 de y, z. Calcule $\dfrac{\partial x}{\partial z}(\frac{\pi}{2}, 1)$.

[2.0] 3. Considere a curva
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 + z^2,\ x + y + z = 1\}.$$
Determine o valor máximo da coordenada x em C.

4. Considere o campo $F(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{y}{y^2+z^2}, \frac{-z}{y^2+z^2}\right)$.

[2.0] a) Determine se F é fechado.

[2.0] b) Determine se F é um gradiente no seu domínio.

[3.0] 5. Calcule o fluxo de
$$F(x,y,z) = (x(x-1), e^{\cos(xz)}, \operatorname{sen} y - 2xz),$$
através da superfície
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = (\sqrt{y^2+z^2})^{\frac{1}{2}} - 1,\ 0 < x < 1\},$$
no sentido da normal unitária $\mathbf{n}$ tal que $n_1 > 0$.

[2.0] 6. Use o Teorema de Stokes para calcular o trabalho de $F(x,y,z) = (0, z - xy, -xz)$ ao longo do bordo da superfície
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1,\ 0 < x < 1\},$$
com a orientação induzida uma normal unitária à sua escolha.

[3.0] 7. Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^1 tal que F é fechado. Mostre que existe uma função $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$, de classe C^1, e uma contante $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que
$$F = \nabla\varphi + \lambda f,$$
onde $f(x,y,z) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)$.