Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Exame/Teste de Recuperação v2 - 25 de Janeiro de 2016
Duração: Teste - 1h30m; Exame - 3h

Apresente e justifique todos os cálculos

Teste 1

1. Considere a função dada por

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 - xy + y^2}{2x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[2.0] a) Estude g do ponto de vista da continuidade.

[1.0] b) Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial x}(-1,1)$.

[2.0] c) Calcule a derivada de g segundo o vetor $(1,1)$ na origem.

[2.0] 2. Considere a função $f(x,y) = g(y^2 + x, x^2 y)$ onde $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que, no ponto $(1,0)$, a derivada é representada pela matriz

$$Dg(1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e a matriz hesseana é dada por

$$D^2 g(1,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0)$.

[3.0] 3. Determine e classifique os pontos de estacionariedade de $f(x,y) = -\frac{2x^3}{3} - x^2 y - y + \frac{y^3}{3}$ em $\mathbb{R}^2$.

4. Considere o conjunto

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 2\,;\ z > y\,;\ x > 0\,;\ y > 0\}.$$

[2.0] a) Escreva uma expressão para o volume de B usando integrais triplos iterados da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

[2.0] b) Calcule o volume de B usando um só integral triplo iterado.

[3.0] 5. Usando coordenadas cilíndricas calcule $\displaystyle\iiint_B f$, em que $f(x,y,z) = z$ e

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 2\,;\ z > \sqrt{x^2+y^2}\,;\ x > 0\,;\ y > 0\}.$$

[3.0] 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 cujo único ponto crítico não é ponto de extremo local. Mostre que nenhuma linha de nível de f, isto é, um conjunto da forma $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$, com $c \in \mathbb{R}$, pode ser fronteira de uma região limitada.

Teste 2

1. Considere o subconjunto M de $\mathbb{R}^3$ dado pela equação $F(x,y,z) = 0$, onde

$$F(x,y,z) = \cos(x) + xy^2 + y + z + z^3.$$

[2.0] a) Mostre que M é uma variedade, e indique a sua dimensão.

[1.0] b) Indique uma base do espaço tangente a M no ponto $(0,1,-1)$.

[2.0] c) Mostre que a equação $F(x,y,z) = 0$ determina z em função de x e y, $z = f(x,y)$, com $f \in C^1$, numa vizinhança do ponto $(0,1,-1)$, e calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1)$.

[2.0] 2. Determine os extremos absolutos da função f, definida por $f(x,y,z) = x - y$, que se encontram no elipsóide dado pela equação $2x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

[2.0] 3. Use o teorema de Green para calcular o trabalho realizado pelo campo vetorial $F(x,y) = (2y, y^2 - x)$ ao longo da linha descrita por $y = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$, no sentido crescente de x.

[2.0] 4. Calcule o trabalho realizado pelo campo vetorial $F(x,y,z) = (2xz, z^2, x^2 + 2yz)$ ao longo do caminho $g(t) = (\cos t, e^{t^4} \operatorname{sen} t, \cos t,)$, $0 \leq t \leq \pi$.

[2.0] 5. Considere o campo $F(x,y,z) = (y(1-z)\cos(\pi z), -x(1-z)\cos(\pi z), \cos(x^2+y^2+z^2))$ e a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,;\, 0 < z < 1\}.$$

Calcule

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n}.$$

em que $\mathbf{n}$ é a normal unitária a S tal que $\mathbf{n}(1,0,z) = (1,0,0)$.

6. Considere as superfícies

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = y;\ 1 < y < 4\} \\ T_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 < 1;\ y = 1\} \\ T_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 < 4;\ y = 4\}. \end{aligned}$$

[2.0] a) Calcule a área de S.

[2.0] b) Seja $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo de classe C^2 tal que

$$\iint_{T_1} \operatorname{rot} G \cdot (0,-1,0) + \iint_{T_2} \operatorname{rot} G \cdot (0,1,0) = 4.$$

Calcule $\displaystyle\iint_S \operatorname{rot} G \cdot \mathbf{n}$, onde $\mathbf{n}$ é a normal unitária exterior a S.

[3.0] 7. Seja $V \subset \mathbb{R}^3$ um domínio regular, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^1 e $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^1 tal que $\phi = 0$ em ∂V. Prove que

$$\iiint_V \nabla\phi \cdot \nabla \times F = 0.$$