Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II
Exame 2 - 7.Jul.2010 - 13h

(Apresente e justifique todos os cálculos)

1. Considere a função $f\colon \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x\neq 0 \text{ e } y\neq 0\}\to\mathbb{R}$ definida pela expressão

$$f(x,y)=x\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{xy}\right).$$

[1 val.] (a) Determine os pontos de $\mathbb{R}^2$ aos quais f pode ser prolongada por continuidade.

[1 val.] (b) Calcule a derivada de f segundo o vector $(2,1)$ no ponto $(x,y)=(1,1)$.

[1 val.] (c) Sendo $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ a função definida pela expressão $g(t)=(1+\cos t, e^t)$, determine $D(g\circ f)(1,1)$.

[1 val.] (d) Seja $h(x,y)=f(x-f(x,y),y+x^2-1)$. Calcule $\dfrac{\partial h}{\partial y}(1,1)$.

2. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} xy+z^2=1\\ x^2-y^2+3=0.\end{cases}$$

[1 val.] Mostre que o sistema define x e y como funções de z numa vizinhança do ponto $(x,y,z)=(1,-2,\sqrt{3})$ e calcule $\dfrac{dx}{dz}(\sqrt{3})$.

[1.5 val.] 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $g(x,y)=x^3+3xy^2-3x$.

4. Considere o conjunto $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x+yz=3,\quad xz+y=1\}$.

[1 val.] (a) Mostre que A é uma variedade e determine a sua dimensão.

[1 val.] (b) Determine bases para os espaços tangente e normal a A em $(0,1,3)$.

[1.5 val.] 5. Sejam $f,g\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ funções de classe C^1 tais que

- $\nabla f(x,y,z)\neq 0$ para todo o $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,
- Existe uma função contínua $\lambda\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ tal que $\nabla g=\lambda\nabla f$.

Mostre que para cada $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ existe um aberto V contendo (x,y,z), um aberto W contendo $f(x,y,z)$, e uma função $\alpha\colon W\to\mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $g=\alpha\circ f$ em V.

Sugestão: Comece por considerar o caso em que $f(x,y,z)=x$ e depois faça uma mudança de variável conveniente.

Teste 2

[1,5 val.] 6. Determine os valores máximo e mínimo que a função $g(x,y) = xy + 2x$ assume na circunferência dada pela equação $x^2 + y^2 = 4$.

[1,5 val.] 7. Considere o conjunto

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\,;\ y > x\ ;\ 0 < z < 4 - y^2\}.$$

Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$.

[1,5 val.] 8. Calcule o volume do sólido

$$S = \{x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z < 4 - (x^2+y^2)^2\ ;\ 0 < y < x\ ;\ 0 < z < 1\}.$$

[1 val.] 9. Calcule a massa total de um aro que une os pontos $(1,0,0)$ e $(1,2,4)$ e que é descrito pelas equações:

$$x^2 + y^2 - z = 1, \qquad z = y^2,$$

sabendo que a densidade de massa é dada pela função $f(x,y,z) = z\sqrt{1+4y^2}$.

[1,5 val.] 10. Use o teorema da divergência para calcular o fluxo do campo $F(x,y,z) = (1-x^2, yx, xz)$ através da superfície

$$S = \{x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\ ;\ x > 0\ ;\ z > 0\},$$

segundo a normal com terceira componente positiva.

[1,5 val.] 11. Use o teorema de Stokes para calcular o fluxo do rotacional do campo $F(x,y,z) = (x,-z,y)$ através da superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2 - \sqrt{y^2+z^2}\ ;\ 0 < x < 1\},$$

segundo a normal com primeira componente positiva.

[1,5 val.] 12. Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ a bola de raio um e centro na origem e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, tal que $f(tx,ty,tz) = t^k f(x,y,z),\ \forall t \in \mathbb{R},\ k > 0$. Prove que

$$\iiint_B f = \frac{1}{k(k+3)} \iiint_B \operatorname{div}(\nabla f).$$