Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Cursos: MEAmb, MEQ, MEBiol, MEBiom
Exame 2^a Época - 7 de Julho de 2021 - 13h
Duração: 2 horas

Resolução abreviada

(2 val.) 1. Calcule ou mostre que não existe o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy^2)}{4x^4+y^2}.$$

Resolução: Temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy^2)}{4x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy^2)}{xy^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{4x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{4x^4+y^2},$$

pois $\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$. Por outro lado,

$$\left|\frac{xy^2}{4x^4+y^2}\right| = \frac{y^2}{4x^4+y^2}\,|x| \leq |x| \to 0 \quad \text{quando} \quad (x,y)\to(0,0),$$

logo o limite existe e é igual a 0.

(3 val.) 2. Seja $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ uma função diferenciável tal que

$$Df(1,0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sendo $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $h(x,y) = f(\cos(xy), x^2y, xe^y)$, calcule a derivada de h no ponto $(1,0)$ segundo o vector $v=(2,-1)$.

Resolução: Notamos que $h = f\circ g$ onde $g(x,y) = (\cos(xy), x^2y, xe^y)$. Como g é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, $g(1,0) = (1,0,1)$ e f é diferenciável em $(1,0,1)$, concluimos que h é diferenciável no ponto $(1,0)$. Portanto a derivada de h no ponto $(1,0)$ segundo o vector $v=(2,-1)$ é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial v}(1,0) &= Dh(1,0)\cdot v = Df(g(1,0))\cdot Dg(1,0)\cdot v = Df(1,0,1)\cdot Dg(1,0)\cdot v \\
&= Df(1,0,1)\cdot \begin{bmatrix} -y\operatorname{sen}(xy) & -x\operatorname{sen}(xy) \\ 2xy & x^2 \\ e^y & xe^y \end{bmatrix}_{|(1,0)} \cdot v \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot v = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(3 val.) 3. Usando uma mudança de coordenadas apropriada calcule o volume do sólido

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 3,\ z^2+1 \leq x^2+y^2,\ y>0\right\}.$$

Resolução: Usando coordenadas cilíndricas (ρ,θ,z), o conjunto V é definido por

$$\rho^2+z^2 \leq 3, \quad z^2+1 \leq \rho^2, \quad y>0.$$

Fazendo uma secção ao sólido para um valor de $\theta \in (0,\pi)$, obtemos no plano das variáveis z e ρ uma região limitada por uma circunferência e uma hipérbole, donde podemos obter os limites de integração para o integral que nos dá o volume de V:

$$vol(V) = \int_V 1 = \int_0^\pi \int_{-1}^1 \int_{\sqrt{z^2+1}}^{\sqrt{3-z^2}} \rho\, d\rho\, dz\, d\theta = \frac{4\pi}{3}.$$

(2 val.) 4. Considere o campo vectorial $F(x,y,z) = (3zx^2, \operatorname{sen} z + z, y\cos z + y + x^3)$. Calcule o trabalho de F ao longo da curva definida pelo caminho $g(t) = (\cos t, 2\operatorname{sen} t, t)$, onde $0 \leq t \leq 2\pi$.

Resolução: Como F é fechado e o seu domínio é $\mathbb{R}^3$, que é um conjunto simplesmente conexo, podemos concluir que F é um campo gradiente, ou seja, existe um campo escalar $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla\phi$. O potencial pode ser dado por $\phi(x,y,z) = y\operatorname{sen} z + yz + x^3 z$. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de linha obtemos o trabalho de F ao longo do caminho g:

$$\int_A^B F\cdot dg = \phi(B)-\phi(A) = \phi(g(2\pi)) - \phi(g(0)) = \phi(1,0,2\pi) - \phi(1,0,0) = 2\pi,$$

onde A e B são os pontos inicial e final, respectivamente, da curva definida por g.

5. Considere a superfície

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+(z-1)^2 = 1, x>0, y>0, z<1\right\},$$

orientada com a normal n tal que $n_z > 0$.

(2 val.) (a) Considere o plano $P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=1\right\}$. Mostre que, numa vizinhança do ponto $(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, 1-\frac{\sqrt{6}}{3})$, o conjunto $S \cap P$ pode ser descrito como o gráfico de uma função da forma $(y,z) = h(x)$, com h de classe C^1, e calcule $Dh(\frac{\sqrt{6}}{6})$.

Resolução: Seja

$$G(x,y,z) = (x^2+y^2+(z-1)^2-1, x+y+z-1),$$

sendo $S \cap P$ conjunto de nível de G. Temos

$$DG(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}) = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2\sqrt{6}}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como a segunda e terceira colunas são linearmente independentes o teorema da função implícita garante que a afirmação do enunciado é verdadeira e que, com $h(x) = (h_1(x), h_2(x))$,

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2\sqrt{6}}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ h_1'(\frac{\sqrt{6}}{6}) \\ h_2'(\frac{\sqrt{6}}{6}) \end{bmatrix} = 0.$$

Logo,

$$Dh(\frac{\sqrt{6}}{6}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(2.5 val.) (b) Calcule o fluxo do campo vectorial $F(x,y,z) = (x, 2-2y, z-1)$ através de S no sentido de n.

Resolução: Sejam

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 < 1, x > 0, y > 0, z < 1\right\},$$

$$T_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0, z = 1\right\},$$

$$T_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + (z-1)^2 < 1, x = 0, y > 0, z < 1\right\},$$

$$T_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (z-1)^2 < 1, x > 0, y = 0, z < 1\right\},$$

e $n_{T_1} = (0,0,1)$, $n_{T_2} = (-1,0,0)$, $n_{T_3} = (0,-1,0)$. Sendo $div\, F = 0$, pelo teorema da divergência

$$0 = \int_V div\, F = -\int_S F \cdot n + \int_{T_1} F \cdot n_{T_1} + \int_{T_2} F \cdot n_{T_2} + \int_{T_3} F \cdot n_{T_3}.$$

Ora, $F \cdot n_{T_2} = -x = 0$ em T_2 e $F \cdot n_{T_1} = z - 1 = 0$ em T_1. Por outro lado, $F \cdot n_{T_3} = 2y - 2 = -2$ em T_3. Logo,

$$\int_S F \cdot n = \int_{T_3} F \cdot n_{T_3} = -\pi/2.$$

(2.5 val.) 6. Utilizando o teorema de Stokes, determine o trabalho do campo

$$H(x,y,z) = \left(x, \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{y^2}{9}, -xz^2 + \frac{y^2 z}{2}\right)$$

ao longo do caminho $g(t) = (2\cos t, 3\,\mathrm{sen}\, t, 2), t \in [0, 2\pi]$.

Resolução: Seja C a curva parametrizada por g e que satisfaz as equações $9x^2+4y^2 = 36$, $z=2$. Seja

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 9x^2+4y^2 < 36, z=2\right\},$$

orientada com a normal unitária $n=(0,0,1)$. Pelo teorema de Stokes,

$$\int_C H \cdot dg = \int_A rot\, H \cdot n.$$

Temos $rot\, H \cdot n = x+2$. Por simetria em relação ao eixo dos y no plano $z=2$, então,

$$\int_C H \cdot dg = \int_A rot\, H \cdot n = \int_A (x+2) = \int_A 2 = 12\pi,$$

uma vez que a área de A é 6π.

(3 val.) 7. Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e não vazio e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Mostre que f não é injectiva.

Resolução: Se f for constante então não é injectiva. Se f não é constante, seja $p \in D$ tal que $\nabla f(p) \neq 0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0.$$

Então, pelo teorema da função implícita, existem infinitos pontos da forma $(k(y),y) \in D$, onde $k \in C^1$, numa vizinhança de p, que satisfazem a equação $f(k(y),y) = f(p)$.