

Cálculo Diferencial e Integral II

Cursos: LEIC-A, LEMat, LEQ21, LEAmb, LEGM, LEC21

Exame 1ª Época - 4 de Julho de 2022 - 8h

Duração: 2 horas

Resolução abreviada

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{3x^2 + 2y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(2 val.) (a) Mostre que f é contínua na origem.

Resolução: Sendo

$$|f(x, y)| = \left| \frac{xy}{\sqrt{3x^2 + 2y^2}} \right| \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq |y|$$

tem-se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$$

e, portanto, a função f é contínua na origem.

(2 val.) (b) Decida sobre a diferenciabilidade de f na origem.

Resolução: Note-se que $\frac{f(x, x)}{x} = \frac{x}{\sqrt{5}|x|}$ e, portanto, a derivada de f segundo o vetor $(1, 1)$ na origem não existe, ou seja, a função f não é diferenciável na origem.

(2 val.) 2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(0, 0, 0) = 0$. Sendo

$$h(x, y, z) = f(f(xy, x^2 + z^2, z), x \operatorname{sen} y, \operatorname{sen} y),$$

determine $\frac{\partial h}{\partial y}(0, 0, 0)$ em função das derivadas parciais de f no ponto $(0, 0, 0)$.

Resolução: Sendo $h = f \circ g$ onde $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por

$$g(x, y, z) = (f(xy, x^2 + z^2, z), x \operatorname{sen} y, \operatorname{sen} y),$$

usando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{\partial h}{\partial y}(0, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y}(0, 0, 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial y}(0, 0, 0) + \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) \cdot \frac{\partial g_3}{\partial y}(0, 0, 0).$$

Uma vez que

$$\frac{\partial g_1}{\partial y}(0, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) \cdot x|_{(0,0,0)} + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0) \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) \cdot 0 = 0,$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial y}(0, 0, 0) = x \cos y|_{(0,0,0)} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g_3}{\partial y}(0, 0, 0) = \cos y|_{(0,0,0)} = 1,$$

temos

$$\frac{\partial h}{\partial y}(0, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0).$$

- (2 val.) 3. Escreva uma expressão para o volume do sólido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$$

usando um integral iterado da forma $\int(\int(\int dy) dz) dx$.

Resolução:

$$\text{vol}(V) = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^1 1 \, dy \, dz \, dx + \int_0^1 \int_{1-x^2}^{2-x^2} \int_0^{\sqrt{2-z-x^2}} 1 \, dy \, dz \, dx.$$

- (3 val.) 4. Calcule o volume do sólido

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, y \geq 0\}.$$

Resolução: Usando uma mudança de coordenadas para coordenadas cilíndricas

$$g(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$$

obtemos

$$\text{vol}(D) = \int_0^\pi \int_0^1 \int_{\rho^2}^{2-\rho} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = \frac{5}{12}\pi.$$

5. Considere os campos vetoriais $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $G : \mathbb{R}^2 \setminus \{(2, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidos por

$$F(x, y) = (2y - \cos(x^2), 3x + 2 \sin(y^2)) \quad \text{e} \quad G(x, y) = \left(-\frac{y}{(x-2)^2 + y^2}, \frac{x-2}{(x-2)^2 + y^2} \right).$$

- (2 val.) (a) Será F um campo gradiente? Justifique a sua resposta.

Resolução: Uma vez que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2 \neq 3 = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

o campo F não é fechado, e portanto não pode ser gradiente.

- (2 val.) (b) Calcule $\oint_C (F + G) \cdot dg$, onde C é a fronteira do intervalo $[-1, 1] \times [-1, 1]$ percorrida uma vez no sentido anti-horário.

Resolução: O campo G é fechado e a curva C é homotópica à curva constante no seu domínio, pelo que $\oint_C G \cdot dg = 0$. Desta forma, usando o Teorema de Green,

$$\oint_C (F + G) \cdot dg = \oint_C F \cdot dg = \iint_{[-1,1] \times [-1,1]} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = 2 \times 2 = 4.$$

- (2 val.) 6. Considere o conjunto dos triângulos planos isósceles de perímetro P . Mostre que um deles tem a maior área possível e determine os comprimentos das respectivas arestas.

Resolução: Considerem-se os triângulos com vértices nos pontos $(-x, 0)$, $(x, 0)$, $(0, y)$, em que $x > 0, y > 0$.

Cada um destes triângulos tem uma aresta de comprimento $2x$ e as outras duas com o mesmo comprimento $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Assim, o perímetro P de cada um destes triângulos é dado pela expressão $2x + 2\sqrt{x^2 + y^2}$.

Note-se que $P = 2x + 2\sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow 4Px + 4y^2 - P^2 = 0$.

A área de cada um destes triângulos é definida pela expressão xy .

Definindo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x, y) = xy$ e $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por $F(x, y) = 4Px + 4y^2 - P^2$, pretende-se determinar os extremos de f sujeitos à condição $F = 0$.

Recorrendo ao método dos multiplicadores de Lagrange tem-se

$$\begin{cases} y = 4\lambda P \\ x = 8\lambda y \\ 4Px + 4y^2 - P^2 = 0, \end{cases}$$

de onde se obtém

$$x = \frac{P}{6}, \quad y = \frac{\sqrt{3}P}{6}.$$

Assim, $2x = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{P}{3}$, ou seja, o triângulo isósceles de área máxima é equilátero com arestas de comprimento $\frac{P}{3}$.

Note-se que $f(x, 0) = f(0, y) = 0$ e $f(x, y) > 0$ no conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, 4Px + 4y^2 - P^2 = 0\}.$$

- (3 val.) 7. Seja $p_\lambda(x) = a_n(\lambda)x^n + \dots + a_1(\lambda)x + a_0(\lambda)$ a expressão de um polinómio de grau n na variável real x cujos coeficientes são funções de classe C^1 do parâmetro real λ . Suponha que o polinómio p_0 possui n raízes reais distintas. Prove que o polinómio p_λ possui também n raízes reais distintas para $|\lambda|$ suficientemente pequeno. (*Sugestão: Recorde que a derivada de um polinómio não se anula numa raiz simples.*)

Resolução: Consideremos a função $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , dada por $F(x, \lambda) = p_\lambda(x)$, e seja x_0 uma raiz do polinómio p_0 . Uma vez que p_0 tem n raízes distintas, todas as suas raízes são simples, e portanto $p'_0(x_0) \neq 0$. Desta forma, temos $F(x_0, 0) = p_0(x_0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, 0) = p'_0(x_0) \neq 0$, pelo que o Teorema da Função implícita garante que numa vizinhança do ponto $(x_0, 0)$ as soluções da equação $F(x, \lambda) = 0 \Leftrightarrow p_\lambda(x) = 0$ podem ser escritas na forma $x = f(\lambda)$, com f de classe C^1 . Este argumento pode ser usado para cada uma das raízes de p_0 ; tomando as vizinhanças correspondentes a cada raiz suficientemente pequenas para não se intersectarem, o que implica tomar $|\lambda|$ suficientemente pequeno, garantimos que as soluções correspondentes a diferentes raízes são distintas, ou seja, que a equação $p_\lambda(x) = 0$ possui pelo menos n soluções distintas. Mas como p_λ é um polinómio não pode ter mais que n raízes distintas. (Para ver que este resultado não é verdade no caso de raízes múltiplas, considere-se o exemplo $p_\lambda(x) = x^2 + \lambda$.)