Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Cursos: LEAer, LEBiol, LEBiom, LEFT
Exame 1ª Época - 4 de Julho de 2022 - 18h
Duração: 2 horas

Resolução abreviada

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{3x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(2 val.) a) Determine o conjunto de pontos em que f é contínua.
Resolução: Pelas propriedades das funções contínuas f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Notando que $f(0,y) = 1$ conclui-se que f não é contínua na origem.

(2 val.) b) Decida sobre a diferenciabilidade da função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $g(x,y) = xyf(x,y)$, na origem.
Resolução: Sendo $g(x,0) = g(0,y) = 0$ tem-se

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Tendo em conta que

$$\frac{|g(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x|y^2|y|}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)} \leq |y|$$

conclui-se que g é diferenciável na origem.

(2 val.) 2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $f(2,1,1) = 0$ e $\nabla f(2,1,1) = (-1,0,1)$. Considere a função $h(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2, ye^{xz}, \operatorname{sen}(xy)+z^3)$. Mostre que a equação $(f \circ h)(x,y,z) = 0$ define z como função de x e y de classe C^1 numa vizinhança do ponto $(0,1,1)$.

Resolução: Consideramos a função $F = f \circ h$. Esta função é de classe C^1 e satisfaz $F(0,1,1) = f(2,1,1) = 0$. Por outro lado

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z}(0,1,1) &= \frac{\partial f}{\partial x}(2,1,1) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial z}(0,1,1) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1,1) \cdot \frac{\partial h_2}{\partial z}(0,1,1) + \frac{\partial f}{\partial z}(2,1,1) \cdot \frac{\partial h_3}{\partial z}(0,1,1) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(2,1,1) \cdot 2z_{|(0,1,1)} + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1,1) \cdot yxe^{xz}_{|(0,1,1)} + \frac{\partial f}{\partial z}(2,1,1) \cdot 3z^2_{|(0,1,1)} \\ &= (-1,0,1) \cdot (2,0,3) = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Logo podemos concluir, pelo Teorema da Função Implícita, que a equação

$$F(x,y,z) = (f \circ h)(x,y,z) = 0$$

define z como função de x e y de classe C^1 numa vizinhança do ponto $(0,1,1)$.

(3 val.) 3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = xy$. Determine os extremos de f no conjunto

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + xy = 1\}.$$

Resolução: Pelo método dos multiplicadores de Lagrange tem-se

$$\begin{cases} y = \lambda(2x+y) \\ x = \lambda(2y+x) \\ x^2+y^2+xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(1-3\lambda) = 0 \\ x = \lambda(2y+x) \\ x^2+y^2+xy = 1. \end{cases}$$

Se $\lambda \neq \frac{1}{3}$, a primeira equação implica $y = -x$, e da terceira equação obtêm-se então os pontos $(-1,1)$ e $(1,-1)$.

Para o caso $\lambda = \frac{1}{3}$, a segunda equação implica $x = y$, e da terceira equação obtêm-se então os pontos $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Assim, em E, o máximo de f é $\frac{1}{3}$ nos pontos $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e o mínimo é -1 nos pontos $(-1,1)$ e $(1,-1)$.

(2 val.) 4. Escreva uma expressão para o volume do sólido

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1-y\right\},$$

usando um integral iterado da forma $\int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz$.

Resolução:

$$vol(V) = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1 \, dx \, dy \, dz.$$

5. Considere o campo vetorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$F(x,y) = (-x^2y + 3x^4, xy^2 - 2y^4).$$

(2 val.) a) Será F um campo gradiente? Justifique a sua resposta.
Resolução: Uma vez que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -x^2 \neq y^2 = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

o campo F não é fechado, e portanto não pode ser gradiente.

(2 val.) b) Calcule $\oint_C F \cdot dg$, onde a curva $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\}$ é percorrida uma vez no sentido horário.
Resolução: Usando o Teorema de Green, e tendo em atenção o sentido pedido, temos

$$\oint_C F \cdot dg = -\iint_{\{x^2+y^2<4\}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = -\iint_{\{x^2+y^2<4\}} \left(x^2+y^2\right) dxdy$$

$$= -\int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \cdot r dr d\theta = -2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 = -8\pi.$$

(2 val.) 6. Calcule o volume de interseção de duas bolas de raio 1 em $\mathbb{R}^3$ cujos centros estão a uma distância $d < 2$.

Resolução: Podemos assumir que o centro de uma das bolas é a origem e o centro da outra bola está colocado no eixo $0z$ a uma distância $d < 2$ da origem. Representando a interseção das bolas usando coordenadas cilíndricas no plano ρz obtemos duas circunferências, de equações

$$\rho^2 + z^2 = 1 \quad \text{e} \quad \rho^2 + (z-d)^2 = 1,$$

que se intersetam em $z = \frac{d}{2}$. Sendo assim o volume da interseção é dado por

$$\begin{aligned} vol &= \int_0^{2\pi}\int_{d-1}^{\frac{d}{2}}\int_0^{\sqrt{1-(z-d)^2}} \rho\, d\rho\, dz\, d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\frac{d}{2}}^{1}\int_0^{\sqrt{1-z^2}} \rho\, d\rho\, dz\, d\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi}\int_{\frac{d}{2}}^{1}\int_0^{\sqrt{1-z^2}} \rho\, d\rho\, dz\, d\theta = \frac{\pi}{3}(4 - 3d + \frac{d^3}{4}). \end{aligned}$$

(3 val.) 7. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^2 tal que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Mostre que para todo o $r > 0$ se tem

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi r}\int_{C_r} u\,,$$

onde $C_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$. *(Sugestão: mostre que o lado direito da igualdade acima é uma função constante de r.)*

Resolução: Seguindo a sugestão, e parametrizando C pelo caminho $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dado por $g(t) = (r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t))$, cuja derivada satisfaz $\|g'(t)\| = r$, vemos que a expressão do lado direito é dada por

$$f(r) = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} u(r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t)) r dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t)) dt.$$

Usando a Regra de Leibnitz, temos então

$$f'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t))\cos(t) + \frac{\partial u}{\partial y}(r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t))\sin(t)\right) dt,$$

que pode ser reescrito como

$$f'(r) = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}(r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t))(-r\,\mathrm{sen}(t)) + \frac{\partial u}{\partial x}(r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t))(r\cos(t))\right) dt,$$

ou seja,

$$f'(r) = \frac{1}{2\pi r}\oint_{C_r}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot dg.$$

Usando agora o Teorema de Green, obtemos

$$f'(r) = \frac{1}{2\pi r}\iint_{\{x^2+y^2<r^2\}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dxdy = 0.$$

Consequentemente, a função $f(r)$ é constante para $r > 0$, e portanto

$$f(r) = \lim_{r\to 0} f(r) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t))dt = u(0,0),$$

onde o último passo é facilmente justificado a partir da continuidade da função $u(x,y)$, uma vez que dado $\varepsilon > 0$ se tem

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t))dt - u(0,0) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big| u(r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t)) - u(0,0) \big| dt < \varepsilon$$

para r suficientemente pequeno tal que $\big| u(r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t)) - u(0,0) \big| < \varepsilon$.