

Cálculo Diferencial e Integral II  
Cursos: LEEC, LEMec, LEAN  
Exame 1ª Época - 4 de Julho de 2022 - 13h  
Duração: 2 horas

Resolução abreviada

1. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 3y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(2 val.)

(a) Determine o conjunto de pontos em que  $f$  é contínua.

**Resolução:** Pelas propriedades das funções contínuas  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .  
Notando que

$$|f(x, y)| \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq |x|$$

conclui-se que  $f$  é contínua na origem.

Portanto  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$ .

(2 val.)

(b) Calcule, se existirem, as derivadas parciais de  $f$  na origem e decida sobre a diferenciabilidade de  $f$  nesse ponto.

**Resolução:** Dado que  $f(0, y) = 0$  tem-se  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

Sendo  $\frac{f(x, 0)}{x} = \frac{x}{|x|}$  a derivada  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  não existe e, portanto,  $f$  não é diferenciável na origem.

(2 val.)

2. Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma função de classe  $C^1$  tal que

$$Df(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Sendo  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $g(x, y, z) = f(\cos x + \sin y, e^{xz}, x^3y + z^2)$ , calcule a derivada de  $g$  no ponto  $(0, 0, 1)$ .

**Resolução:** Sendo  $h(x, y, z) = (\cos x + \sin y, e^{xz}, x^3y + z^2)$  temos  $g = f \circ h$ . Como  $f$  e  $h$  são funções de classe  $C^1$ , usando a regra da derivação composta, obtemos

$$Dg(0, 0, 1) = Df(h(0, 0, 1)) \cdot Dh(0, 0, 1).$$

Note-se que  $h(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$  e

$$Dh(0, 0, 1) = \begin{bmatrix} -\sin x & \cos y & 0 \\ ze^{xz} & 0 & xe^{xz} \\ 3x^2y & x^3 & 2z \end{bmatrix}_{|(0,0,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$Dg(0, 0, 1) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 6 & 5 & 14 \end{bmatrix}.$$

- (3 val.) 3. Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x, y, z) = y$ . Determine os extremos de  $f$  no conjunto

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 4, y + z = 1\}.$$

**Resolução:** Pelo método dos multiplicadores de Lagrange tem-se

$$\begin{cases} 0 = 2\lambda_1 x \\ 1 = \lambda_2 \\ 0 = 2\lambda_1 z + \lambda_2 \\ x^2 + z^2 = 4 \\ y + z = 1. \end{cases}$$

Da primeira equação obtém-se  $\lambda_1 = 0$  ou  $x = 0$ . Da segunda e terceira equações conclui-se que  $\lambda_1 \neq 0$ . Portanto tem-se  $x = 0$ .

Da quarta e da quinta equações obtém-se as soluções  $(0, 3, -2)$  e  $(0, -1, 2)$ .

Assim, em  $L$ , o mínimo de  $f$  é  $-1$  no ponto  $(0, -1, 2)$  e o máximo de  $f$  é  $3$  no ponto  $(0, 3, -2)$ .

- (2 val.) 4. Escreva uma expressão para o volume do sólido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y \leq z \leq 2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

usando um integral iterado da forma  $\int(\int(\int dx) dz) dy$ .

**Resolução:**

$$\text{vol}(V) = \int_0^1 \int_y^{2-y^2} \int_0^{z-y} 1 \, dx \, dz \, dy.$$

5. Considere o campo vetorial  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido por

$$F(x, y, z) = (2xy + z^2, x^2, 2xz).$$

- (2 val.) (a) Justifique que  $F$  é um campo gradiente.

**Resolução:** Uma vez que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 2z = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0 = \frac{\partial F_3}{\partial y},$$

o campo  $F$  é fechado. Como o seu domínio é  $\mathbb{R}^3$ , que é simplesmente conexo, o campo  $F$  é necessariamente um campo gradiente.

- (2 val.) (b) Calcule  $\int_C F \cdot dg$ , onde a curva  $C = \{(\cos^2(t), \sin(t) \cos(t), t^2) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq t \leq \pi\}$  é percorrida no sentido de  $z$  crescente.

**Resolução:** Podemos calcular um potencial para  $F$  resolvendo as equações

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy + z^2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = 2xz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi = x^2 y + xz^2 + C(y, z) \\ x^2 + \frac{\partial C}{\partial y} = x^2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = 2xz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi = x^2 y + xz^2 + C(y, z) \\ C(y, z) = D(z) \\ 2xz + D'(z) = 2xz \end{cases}$$

pelo que  $\phi(x, y, z) = x^2y + xz^2$  é um potencial. Desta forma, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos, com  $g(t) = (\cos^2(t), \sin(t) \cos(t), t^2)$ ,

$$\int_C F \cdot dg = \phi(g(\pi)) - \phi(g(0)) = \phi(1, 0, \pi^2) - \phi(1, 0, 0) = \pi^4.$$

- (2 val.) 6. Calcule o momento de inércia de um cone homogéneo (ou seja, com densidade de massa constante) com raio da base  $R$ , altura  $h$  e massa  $M$ , em torno do seu eixo de simetria.

**Resolução:** Podemos assumir que o eixo de simetria é o eixo  $0z$  e sendo assim o momento de inércia do cone  $C$  é dado por

$$I_{0z} = \int_C \sigma d_{0z}^2$$

onde  $\sigma(x, y, z) = c$  é a função densidade de massa e  $d_{0z}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$  é a distância ao eixo  $0z$ . Usando coordenadas cilíndricas obtemos

$$I_{0z} = \int_C \sigma d_{0z}^2 = c \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{\frac{R}{h}z} \rho^3 d\rho dz d\theta = \frac{R^4 h}{10} c\pi.$$

Por outro lado a massa do cone é dada por

$$M = c \cdot \text{vol}(C) = c \int_C 1 = c \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{\frac{R}{h}z} \rho d\rho dz d\theta = \frac{R^2 h}{3} c\pi,$$

donde concluímos que

$$c = \frac{3M}{\pi R^2 h}.$$

Logo

$$I_{0z} = \frac{3R^2 M}{10}.$$

- (3 val.) 7. Mostre que para cada  $a \in \mathbb{R}$  suficientemente próximo de 1 existe um único valor  $b = b(a)$  próximo de 1 tal que a elipse de equação  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  tem comprimento  $2\pi$ . Mostre ainda que  $\lim_{a \rightarrow 1} \frac{b(a) - 1}{1 - a} = 1$ .

**Resolução:** Uma parametrização da elipse é dada pela função  $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $g(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$ , pelo que o seu comprimento é

$$l(a, b) = \int_0^{2\pi} \|g'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} dt.$$

Pela regra de Leibnitz,  $l(a, b)$  é uma função de classe  $C^1$ , e

$$\frac{\partial l}{\partial b}(a, b) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial b} \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} \frac{b \cos^2(t)}{\sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}} dt.$$

Deste modo, temos portanto

$$l(1, 1) = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \quad \text{e} \quad \frac{\partial l}{\partial b}(1, 1) = \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = \pi \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Implícita, sabemos então que existe uma vizinhança do ponto  $(a, b) = (1, 1)$  na qual as soluções da equação  $l(a, b) = 2\pi$  podem ser escritas na forma  $b = b(a)$ . Além disso,

$$b'(1) = - \left( \frac{\partial l}{\partial b}(1, 1) \right)^{-1} \frac{\partial l}{\partial a}(1, 1) = -\frac{\pi}{\pi} = -1,$$

onde  $\frac{\partial l}{\partial a}(1, 1) = \pi$  se calcula de mesma forma que  $\frac{\partial l}{\partial b}(1, 1)$ , ou seja,

$$\lim_{a \rightarrow 1} \frac{b(a) - 1}{a - 1} = -1.$$