Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Cursos: MEAmb, MEQ, MEBiol, MEBiom
Exame 1^a Época - 14 de Junho de 2021 - 13h
Duração: 2 horas

Resolução abreviada

1. Considere a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(2 val.) (a) Mostre que f é contínua na origem.

Resolução: f é contínua na origem sse

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$

Temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0,$$

pois $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{e^u-1}{u} = 1$.

(1 val.) (b) Diga, justificando, se f é diferenciável na origem.

Resolução: Para mostrar que f não é diferenciável na origem, basta mostrar que as derivadas parciais não existem na origem. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{h^2}-1}{h|h|},$$

e o último limite não existe, por ter limites laterais diferentes.

(3 val.) 2. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $g(x,y) = 3y^2 - 3xy + x^3$.

Resolução: A equação vectorial,

$$\nabla g(x,y) = (-3y+3x^2, 6y-3x) = (0,0)$$

tem as soluções $(x,y) = (0,0)$ e $(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, logo estes são os pontos estacionários de g.

A matriz hessiana de g é:

$$H_g(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix},$$

logo

$$H_g(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H_g\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix},$$

donde podemos concluir que $(0,0)$ é um ponto de sela (o determinante da matriz é negativo, logo os valores próprios têm sinais contrários), e $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ é um ponto de mínimo local (o determinante e o traço da matriz são positivos, logo os valores próprios são ambos positivos).

(2 val.) 3. Considere o sólido

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x < y < 1,\, 0 < z < (y-1)^2,\, x > 0\right\}.$$

Calcule o volume de D usando um integral iterado da forma $\iiint dz\, dy\, dx$.

Resolução: Começamos por fixar x igual a uma constante entre 0 e 1. O corte no plano yz é a região delimitada pelo eixo dos $y's$, pela recta vertical $y = x$ e a parábola voltada para cima com vértice no ponto $(1,0)$, dada pela equação $z = (y-1)^2$. Portanto o volume de D é dado por

$$\int_0^1 \int_x^1 \int_0^{(y-1)^2} 1\, dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_x^1 (y-1)^2\, dy\, dx = \int_0^1 -\frac{(x-1)^3}{3}\, dx = \frac{1}{12}.$$

(2 val.) 4. Considere a região

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\varphi(x) \leq y \leq \varphi(x);\, a \leq x \leq b\right\}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e não-negativa. Seja $f\colon D \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x,y) = -f(x,-y)$ para todo $(x,y) \in D$. Mostre que

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = 0.$$

Resolução: Temos

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_a^b \int_{-\varphi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)\, dy\, dx.$$

Fazendo a mudança de variáveis $g(u,v) = (u,-v)$ obtemos

$$\int_a^b \int_{-\varphi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)\, dy\, dx = \int_a^b \int_{\varphi(u)}^{-\varphi(u)} -f(u,-v)\, dv\, du = \int_a^b \int_{\varphi(u)}^{-\varphi(u)} f(u,v)\, dv\, du,$$

logo

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = -\iint_D f(x,y)\, dxdy,$$

e obtemos o resultado desejado.

5. Considere a superfície

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, y > 0, z > 0\right\},$$

orientada com a normal n tal que $n_z < 0$.

(2 val.) (a) Determine o espaço normal a S no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
Resolução: O espaço normal a S no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é a recta gerada pelo valor do campo vectorial $\nabla(x^2 + y^2 + z)$ nesse ponto, ou seja é a recta gerada pelo vector $(1,1,1)$.

(3 val.) (b) Calcule o fluxo de $F(x,y,z) = (x + z^3, y, 2 + z)$ através de S no sentido de n.
Resolução: Sejam

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z < 1 - x^2 - y^2, y > 0, z > 0\right\},$$

$$T_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, y > 0, z = 0\right\},\ \ T_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : o < z < 1 - x^2, y = 0\right\},$$

e $n_{T_1} = (0,0,-1)$, $n_{T_2} = (0,-1,0)$.

Pelo teorema da divergência,

$$\iiint_V divF = -\iint_S F\cdot n + \iint_{T_1} F\cdot n_{T_1} + \iint_{T_2} F\cdot n_{T_2},$$

pelo que

$$\iint_S F\cdot n = \iint_{T_1} F\cdot n_{T_1} + \iint_{T_2} F\cdot n_{T_2} - \iiint_V divF.$$

Temos $divF = 3$ e

$$\iiint_V divF = \int_0^\pi \int_0^1 \int_0^{1-\rho^2} 3\rho dz d\rho\theta = \frac{3\pi}{4}.$$

Temos $F\cdot n_{T_1} = -(2+z) = -2$ em T_1, logo $\iint_{T_1} F\cdot n_{T_1} = -\pi$.
Temos $F\cdot n_{T_2} = -y = 0$ em T_2. Logo $\iint_{T_2} F\cdot n_{T_2} = 0$ e

$$\iint_S F\cdot n = -\pi + 0 - \frac{3\pi}{4} = -\frac{7\pi}{4}.$$

(3 val.) (c) Seja $H(x,y,z) = (2xyz - 3y, x^2z + 5x, x^2y)$. Calcule o fluxo de $rot\, H$ através de S no sentido de n.

Resolução: O bordo de S, orientado de forma compatível com n, é a união de duas curvas, A e B, dadas por

$$A = \left\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1, y>0\right\}, \quad B = \left\{(x,0,z)\in\mathbb{R}^3 : 0<z=1-x^2\right\},$$

onde A é percorrida no sentido horário, visto de $(0,0,10)$, e B é percorrida no sentido anti-horário, visto de $(0,-10,0)$. É conveniente parametrizar A e B nos sentidos opostos:

$$A:\ g(t) = (\cos(t), \sin(t), 0),\ t\in[0,\pi], \quad B:\ g(t) = (t, 0, 1-t^2),\ t\in[-1,1]$$

Pelo teorema de Stokes, temos

$$\iint_S rotH\cdot n = \int_A H\cdot dg + \int_B H\cdot dg.$$

Temos

$$\begin{aligned}\int_A H\cdot dg &= -\int_0^\pi (-3\sin(t), 5\cos(t), \cos^2(t)\sin(t))\cdot(-\sin(t),\cos(t),0)\,dt\\ &= -\int_0^\pi 3\cos^2(t) + 5\sin^2(t)\,dt = -4\pi,\end{aligned}$$

$$\int_B H\cdot dg = -\int_{-1}^1 (0, t^2(1-t^2)+5t, 0)\cdot(1,0,-2t)dt = 0.$$

Logo,

$$\iint_S rotH\cdot n = -4\pi.$$

(2 val.) 6. Sejam $A\subset\mathbb{R}^3$ e $B\subset\mathbb{R}^3$ superfícies compactas tal que $A\cap B=\emptyset$. Sejam $p\in A$ e $q\in B$ pontos que minimizam a distância entre os pontos de A e os pontos de B. Mostre que

$$p-q\in T_p^\perp A \quad \text{e} \quad p-q\in T_q^\perp B.$$

Resolução: Seja $x\in A$. O quadrado da distância entre x e um ponto $y\in B$ é dado por

$$d_x^2(y) = (x-y)\cdot(x-y).$$

Logo,

$$\nabla d_x^2(y) = 2(y - x).$$

Do mesmo modo, se $y \in B$, o quadrado da distância entre y e um ponto x de A é

$$d_y^2(x) = (x - y) \cdot (x - y).$$

Logo,

$$\nabla d_y^2(x) = 2(x - y).$$

Por outro lado, de acordo com o método dos multiplicadores de Lagrange, se p e q satisfazem as condições do enunciado, temos de ter

$$\nabla d_p^2(q) \in T_p^{\perp} B, \ \ \nabla d_q^2(p) \in T_p^{\perp} A.$$