Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
TESTE DE PREPARAÇÃO

(1) Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} 5 + \dfrac{x^2y^4}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ a, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determine, justificando, o valor de a para que f seja contínua na origem.

(2) Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x,y) = (xy, x^2+y^2)$ e a função de classe C^1, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que $f(1,1,1) = (1,2)$ e

$$Df(1,1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule a derivada de $g \circ f$ no ponto $(1,1,1)$, segundo o vector $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

(3) Determine e classifique os pontos críticos do campo escalar dado por

$$f(x,y,z) = 3x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 + \frac{2}{3}z^3 - 2z.$$

(4) Considere o sistema

$$\begin{cases} 2ye^{y-1} & = & t \\ x^2 + y^2 & = & \cos^2(\frac{\pi}{2}t) + 1. \end{cases}$$

a) Mostre que este sistema define, numa vizinhança do ponto $(t_0, x_0, y_0) = (2,1,1)$, as variáveis x e y como funções de t, de classe C^1.
b) Calcule $x'(2)$ e $y'(2)$.

(5) Considere o conjunto

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\,;\, x = y\,;\, z > 0\}.$$

a) Mostre que M é uma variedade e determine a sua dimensão.
b) Determine um vector normal a M no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

(6) Determine o valor máximo e o valor mínimo da função $f(x,y,z) = xy + z^2$ no conjunto definido por

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y = x. \end{cases}$$

(7) Mostre que uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de classe C^1, com gradiente nulo numa bola centrada na origem, é constante nessa bola.