Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste de preparação

1. Considere o conjunto
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 2\,;\, 0 < x < 1\,;\, y > 0\,;\, z > 0\}.$$
   (a) Escreva expressões para o volume de V em termos de integrais iterados das duas formas seguintes: $\int(\int(\int dz)dy)dx$; $\int(\int(\int dx)dy)dz$.
   (b) Calcule o volume de V.

2. Calcule, em coordenadas cilíndricas, o momento de inércia relativo ao eixo Oz do sólido
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\,;\, 0 < z < 1 + x^2 + y^2\,;\, y > 0\},$$
cuja densidade de massa é constante e igual a um.

3. Calcule a massa do fio descrito por
$$C = \{x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,;\, z = xy\,;\, x > 0\}$$
e com densidade de massa $\sigma(x, y, z) = \sqrt{1 + (x^2 - y^2)^2}$.

4. Calcule o trabalho do campo vectorial
$$F(x, y) = \left(-\frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} - y^3\,,\, \frac{2x+2}{(x+1)^2 + y^2} + x^3 + y\right),$$
ao longo da circunferência de raio igual a dois e centro na origem de $\mathbb{R}^2$ e no sentido positivo.

5. Considere a superfície
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + x^2 = y^2 + z^2\,;\, 0 < x < 2\}.$$
orientada com a normal ν que no ponto $(1, 0, \sqrt{2})$ tem terceira componente positiva.
   a) Calcule a área de S.
   b) Calcule o fluxo do campo vectorial $F(x, y, z) = (x, y, -z)$ através de S no sentido da normal ν, usando o teorema de Gauss.
   c) Calcule o fluxo do campo vectorial $G(x, y, z) = (-x, -y, 2z)$ através de S no sentido da normal ν, usando o teorema de Stokes.
   d) Calcule o fluxo do rotacional do campo $H(x, y, z) = (-y, x, z)$ através de S no sentido da normal ν.