Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Exercícios Resolvidos

Extremos condicionados

Exercício 1 *Escreva 4 como uma soma de 4 números reais positivos cujo produto seja máximo.*

Resolução: Queremos maximizar a função

$$f(x, y, z, w) = xyzw$$

sob a restrição

$$x + y + z + w = 4.$$

De acordo com a regra dos multiplicadores de Lagrange, devemos procurar os pontos críticos da função

$$F(x, y, z, w) = xyzw + \lambda(x + y + z + w - 4).$$

Uma vez que

$$\nabla F = (yzw + \lambda, xzw + \lambda, xyw + \lambda, xyz + \lambda),$$

os possíveis pontos de máximo deverão satisfazer

$$\begin{cases} yzw + \lambda = 0 \\ xzw + \lambda = 0 \\ xyw + \lambda = 0 \\ xyz + \lambda = 0 \\ x + y + z + w = 4 \end{cases}$$

Se alguma das variáveis for zero, o produto será zero e portanto não será máximo; assumindo $xyzw \neq 0$, teremos $\lambda \neq 0$ e portanto dividindo as quatro primeiras equações membro a membro obtém-se $x = y = z = w$, e da última equação vem $x = y = z = w = 1$.

A região do hiperplano $x + y + z + w = 4$ na qual $x, y, z, w \geq 0$ é compacta. Portanto sabemos que o máximo da função f naquela região existe; logo, tem que ser o ponto $(1, 1, 1, 1)$.

Exercício 2 *Que dimensões deverá ter uma caixa rectangular de volume V, aberta numa das faces, por forma a que a área da sua superfície seja mínima?*

Resolução: Sejam $x, y, z > 0$ as dimensões da caixa. O volume da caixa será

$$V = xyz.$$

Supondo que a face aberta é a face de lados x, y, vemos que a área da caixa será

$$A(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz.$$

O problema é minimizar a função A sob a restrição $xyz = V$. De acordo com a regra dos multiplicadores de Lagrange, devemos procurar os pontos críticos da função

$$F(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - V).$$

Uma vez que

$$\nabla F = (y + 2z + \lambda yz, x + 2z + \lambda xz, 2x + 2y + \lambda xy),$$

os possíveis pontos de mínimo deverão satisfazer

$$\begin{cases} y + 2z + \lambda yz = 0 \\ x + 2z + \lambda xz = 0 \\ 2x + 2y + \lambda xy = 0 \\ xyz = V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1/z + 2/y + \lambda = 0 \\ 1/z + 2/x + \lambda = 0 \\ 2/y + 2/x + \lambda = 0 \\ xyz = V \end{cases}$$

e portanto $x = y = 2z$, donde $z = \left(\frac{V}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$. Por outras palavras, a caixa deverá ter base quadrada e altura igual a metade do lado do quadrado.

Exercício 3 *Determine o comprimento dos semieixos da elipse de equação*

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9.$$

(Sugestão: Recorde que os eixos de uma elipse a intersectam nos pontos em que a distância ao centro é máxima/mínima.)

Resolução: De acordo com a sugestão, basta achar os extremos (do quadrado) da distância ao centro da elipse. Uma vez que a elispe é claramente simétrica em relação à origem (se (x, y) satisfaz a equação então $(-x, -y)$ também a satisfaz), devemos então encontrar os extremos da função

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

sob a restrição

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9.$$

De acordo com a regra dos multiplicadores de Lagrange, devemos procurar os pontos críticos da função

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9).$$

Uma vez que

$$\nabla F = (2x + 10\lambda x + 8\lambda y, 2y + 8\lambda x + 10\lambda y),$$

os possíveis pontos de extremo deverão satisfazer

$$\begin{cases} 2x + 10\lambda x + 8\lambda y = 0 \\ 2y + 8\lambda x + 10\lambda y = 0 \\ 5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9 \end{cases}$$

Claramente nem $(0,0)$ não é uma possível solução, uma vez que não é um ponto da elipse; portanto a única forma de podermos ter

$$\begin{bmatrix} 1+5\lambda & 4\lambda \\ 4\lambda & 1+5\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é ser

$$\det \begin{bmatrix} 1+5\lambda & 4\lambda \\ 4\lambda & 1+5\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1+5\lambda)^2 - 16\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow 1 + 5\lambda = \pm 4\lambda.$$

Portanto obtemos $x = \pm y$, e substituindo na equação da elipse vem

$$10x^2 \pm 8x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \text{ ou } x^2 = \frac{9}{2}$$

correspondendo às distâncias à origem

$$\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2x^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \text{ ou } 3.$$

Como a elipse é compacta e f contínua, f tem que possuir máximo e mínimo ao longo da elipse, e de acordo com o teorema acerca dos extremos condicionados tais pontos devem ser escolhidos de entre os pontos determinados acima. Como f só assume dois valores nesses pontos, um tem que ser o máximo e o outro o mínimo. Portanto os comprimentos dos semieixos da elipse são 1 e 3.

Exercício 4 *Calcule o máximo e o mínimo da função $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ na região $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$.*

Resolução: Uma vez que a bola fechada $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ é compacta e f é contínua, f possui máximo e mínimo nesta região. Uma vez que

$$\nabla f(x,y,z) = (1, -2, 2) \neq \mathbf{0},$$

vemos que f não possui qualquer extremo local na bola aberta $x^2 + y^2 + z^2 < 9$, pelo que o máximo e o mínimo terão que estar na fronteira $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. De acordo com a regra dos multiplicadores de Lagrange, devemos procurar os pontos críticos da função

$$F(x,y,z) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9).$$

Uma vez que

$$\nabla F = (1 + 2\lambda x, -2 + 2\lambda y, 2 + 2\lambda z),$$

os possíveis pontos de mínimo deverão satisfazer

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ -2 + 2\lambda y = 0 \\ 2 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{\lambda} \\ z = -\frac{1}{\lambda} \\ \frac{9}{4\lambda^2} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mp 1 \\ y = \pm 2 \\ z = \mp 2 \\ \lambda = \pm\frac{1}{2} \end{cases}$$

Portanto o máximo e o mínimo serão necessariamente os pontos $(1, -2, 2)$ e $(-1, 2, -2)$. (Isto aliás poderia ver-se imediatamente observando que a função f é simplesmente o produto interno de (x, y, z) com o vector fixo $(1, -2, 2)$.)