Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Exercícios Resolvidos

Derivadas de ordem superior. Extremos

Exercício 1 *Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função*

$$f(x,y) = ye^{1-y^2-x^2}.$$

Resolução: Os pontos de estacionaridade são os pontos que verificam

$$\nabla f(x,y) = (-2xye^{1-y^2-x^2}, (1-2y^2)e^{1-y^2-x^2}) = (0,0),$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2xy = 0 \\ 1-2y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \;\vee\; y = 0 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\vee\; y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Assim, os pontos de estacionaridade são $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

A matriz Hessiana de f é dada por

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2y(2x^2-1)e^{1-y^2-x^2} & 2x(2y^2-1)e^{1-y^2-x^2} \\ \\ 2x(2y^2-1)e^{1-y^2-x^2} & 2y(2y^2-3)e^{1-y^2-x^2} \end{bmatrix}.$$

Nos pontos de estacionaridade obtemos

$$H\left(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{bmatrix} \mp\sqrt{2e} & 0 \\ \\ 0 & \mp 2\sqrt{2e} \end{bmatrix},$$

donde podemos concluir que $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ é um ponto de máximo local e $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ é um ponto de mínimo local. O valor do máximo é $f(0, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2e}}{2}$ e o valor do mínimo é $f(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\sqrt{2e}}{2}$.

Exercício 2 *Mostre que a função* $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ *tem máximo e mínimo no conjunto*

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\,;\, |y| \leq 1\},$$

e determine os pontos correspondentes.

Resolução: Sendo f contínua e Q um conjunto compacto, f tem máximo e mínimo em Q. (Teorema de Weierstrass).

Da definição de f, podemos concluir imediatamente que:

a) $f(0,0) > f(x,y)\ \forall (x,y) \neq (0,0)$ e, portanto, a origem é o ponto de máximo absoluto de f.

b) Os conjuntos de nível de f são circunferências centradas na origem e f decresce à medida que $\|(x,y)\|^2 = (x^2+y^2) \to \infty$, ou seja, à medida que o raio das circunferências aumenta.

Portanto, os vértices do quadrado Q são os pontos de mínimo de f porque se encontram sobre a circunferência centrada na origem e de raio $\sqrt{2}$.

Note que a origem é um ponto de estacionaridade de f porque $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Exercício 3 *Considere a função* $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3$.

a) Determine os pontos de estacionaridade de f e classifique-os.

b) Mostre que a função f tem máximo e mínimo absolutos no conjunto definido por $x^2 + y^2 \leq 2$, e determine-os.

Resolução:

a) Dado que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3x^2 = x(2+3x) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \end{cases}$$

os pontos de estacionaridade são dados pelas soluções das equações

$$\begin{cases} x(2+3x) = 0 \\ 2y = 0, \end{cases}$$

ou seja, são os pontos $(0,0)$ e $(-\frac{2}{3}, 0)$.

Para os classificar devemos analisar a matriz das derivadas parciais de f de ordem dois (matriz Hessiana de f, $H(x,y)$). Sendo

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+6x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

temos

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad H(-\frac{2}{3}, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Assim $H(0,0)$ é definida positiva e, portanto, $(0,0)$ é um ponto de mínimo de f. A matriz $H(-\frac{2}{3}, 0)$ é indefinida e, portanto, $(-\frac{2}{3}, 0)$ não é extremo de f.

b) O conjunto D definido pela equação $x^2+y^2 \leq 2$ é limitado e fechado, ou seja, compacto e, sendo f uma função contínua, pelo Teorema de Weierstrass concluímos que f tem máximo e mínimo absolutos em D.

   Note-se que a origem $(0,0)$ é um ponto do interior do conjunto D e $f(0,0)=0$.

   Na fronteira do conjunto D, ou seja para $x^2+y^2=2$, temos $f(x,y)=2+x^3$.

   Sabendo que $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$, na fronteira de D teremos

$$2-2\sqrt{2} = f(-\sqrt{2},0) \leq f(x,y) \leq f(\sqrt{2},0) \leq 2+2\sqrt{2}.$$

   Assim, concluímos que $(-\sqrt{2},0)$ é o mínimo absoluto de f em D e $(\sqrt{2},0)$ é o ponto de máximo absoluto de f em D.

Exercício 4 *Determine e classifique os pontos de estacionaridade das seguintes funções:*

a) $f(x,y) = -3(x^2+y^2)+2xy$.

b) $f(x,y,z) = (x^2+y^2-z)(1-z^2)$.

Resolução:

a) Temos $\nabla f(x,y) = (-6x+2y, -6y+2x)$. Logo, a equação $\nabla f(x,y)=(0,0)$ tem apenas a solução $x=y=0$ e o ponto $(0,0)$ é o único ponto crítico de f.

   A matriz Hessiana de f é

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

   Os valores próprios de $H_f(0,0)$ são dados por

$$\det(H_f(0,0)-\lambda I) = (-6-\lambda)^2 - 4 = 0,$$

   ou seja $\lambda=-8$ e $\lambda=-4$. Assim, $H_f(0,0)$ é definida negativa e $(0,0)$ é um máximo.

b) Temos $\nabla f(x,y,z) = (2x(1-z^2), 2y(1-z^2), -(1-z^2)-2z(x^2+y^2-z))$. Logo, os pontos críticos são dados por

$$\{x=0 \vee z \pm 1\} \wedge \{y=0 \vee z=\pm 1\} \wedge \{(1-z^2)+2z(x^2+y^2-z)=0\}.$$

   Assim temos $x=y=0$ e $z=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, ou seja os pontos críticos $a=(0,0,\frac{1}{\sqrt{3}})$ e $b=(0,0,-\frac{1}{\sqrt{3}})$. Temos também as soluções com $z=+1$ e $x^2+y^2=1$, que representam uma circunferência de raio 1 no plano $z = 1$ constituída por pontos críticos. (Verifica-se facilmente que para $z = -1$ não existem valores de x e y que resolvam a terceira equação.)

A matriz Hessiana de f é dada por,

$$H_f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2(1-z^2) & 0 & -4xz \\ 0 & 2(1-z^2) & -4yz \\ -4xz & -4yz & 4z - 2(x^2+y^2-z) \end{bmatrix}.$$

Então,

$$H_f(0, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \pm\frac{4}{\sqrt{3}} \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Assim, os valores próprios de $H_f(a)$ são todos positivos e a é um mínimo, ao passo que $H_f(b)$ tem dois valores próprios positivos e um negativo sendo indefinida e sendo o ponto b um ponto em sela.

Seja agora $p = (x, y, z)$ com $x^2 + y^2$ e $z = 1$. Temos,

$$H_f(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4x \\ 0 & 0 & -4y \\ -4x & -4y & 4 \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios são solução de

$$-\lambda(-\lambda(4-\lambda) - 16y^2) + 16x^2\lambda = 0.$$

Como $x^2 + y^2 = 1$, obtemos, resolvendo $\lambda(16 + \lambda(4 - \lambda)) = 0$, os valores próprios $0, 2+2\sqrt{5}, 2-2\sqrt{5}$. Logo, $H_f(p)$ é indefinida e qualquer destes pontos p é um ponto em sela.