Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Exercícios Resolvidos

Diferenciabilidade

Exercício 1 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *definida pela expressão*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2} \sin(x^2+y^2), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Calcule as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\,; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Resolução: Para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ podemos simplesmente derivar f em ordem a x e obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2)^2 - 2x^2y(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4} \sin(x^2+y^2) + \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2} 2x \cos(x^2+y^2)$$

e, portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 0.$$

Para calcular a segunda derivada parcial usamos a definição e obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0.$$

Exercício 2 *Considere a função* $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

a) Calcule a derivada de f *no ponto* $(0,1)$.

b) Calcule a derivada de f *no ponto* $(1,0)$ *segundo o vector* $v = (1,1)$.

Resolução:

a) Sendo $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, temos

$$Df(0,1) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) $D_v f(1,0) = Df(1,0) \cdot v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$

Exercício 3 *Considere a função* $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.

a) Caracterize topologicamente o domínio de f.

b) Descreva os conjuntos de nível de f.

c) Calcule a derivada de f *no ponto* $(0,1)$.

d) Calcule as derivadas de f *segundo vetores no ponto* $(1,0)$.

Resolução:

a) Dado que deveremos ter $x^2+y^2>0$, o domínio de f é o conjunto aberto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b) Cada conjunto de nível C_α de f será caracterizado pela condição $f(x,y)=\alpha$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim, teremos

$$C_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(x^2+y^2) = \alpha\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = e^\alpha\}$$

e, portanto, os conjuntos de nível de f serão as circunferências centradas na origem.

c) Note-se que as derivadas parciais de f são contínuas no domínio de f e, portanto, a função f é diferenciável e a sua derivada no ponto $(0,1)$ será representada pela matriz

$$Df(0,1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2} \end{bmatrix}_{(0,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

d) Seja $w=(u,v) \in \mathbb{R}^2$ um vector qualquer. Então a derivada de f segundo w será dada por

$$D_w f(1,0) = \begin{bmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2} \end{bmatrix}_{(1,0)} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 2u$$

Exercício 4

Considere a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+3y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

b) Diga, justificando, se f *é diferenciável na origem.*

Resolução:

a) As derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

b) A função f é diferenciável na origem se e só se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-Df(0,0)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}{\|(x,y)\|} = 0,$$

ou seja, se e só se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+3y^4} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Calculando os limites direcionais, fazendo $y = mx$, obtemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{(x^2+3m^4x^4)\sqrt{x^2+m^2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{(1+3m^4x^2)|x|\sqrt{1+m^2}}.$$

Como temos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{mx}{(1+3m^4x^2)|x|\sqrt{1+m^2}} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{mx}{(1+3m^4x^2)|x|\sqrt{1+m^2}} = -\frac{m}{\sqrt{1+m^2}},$$

podemos concluir que o limite não existe e portanto f não é diferenciável na origem.

Exercício 5

Considere a função dada por

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{2x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. *Mostre que g é contínua na origem.*
2. *Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)$ e mostre que g é diferenciável na origem.*
3. *Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ nos restantes pontos de $\mathbb{R}^2$ e diga, justificando, se g é de classe C^1.*

Resolução:

a) Se $(x,y) \neq (0,0)$, uma vez que $2x^2+y^4 \geq 2x^2$, tem-se

$$|g(x,y) - g(0,0)| = \left| \frac{x^2y^2}{2x^2+y^4} - 0 \right| \leq \frac{x^2y^2}{2x^2} = \frac{y^2}{2} \longrightarrow 0 \ .$$

b) Como $g(x,0) = g(0,y) = 0$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ conclui-se que no ponto $(0,0)$ se tem $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$, e portanto a matriz Jacobiana nesse ponto é $Dg(0,0) = [0 \ \ 0]$. Portanto g é diferenciável na origem porque

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{g(h,k) - g(0,0) - Dg(0,0)\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}}{||(h,k)||} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k^2}{(2h^2+k^4)||(h,k)||} = 0 \ ,$$

uma vez que

$$\left| \frac{h^2k^2}{(2h^2+k^4)||(h,k)||} \right| \leq \frac{h^2}{2h^2} \frac{k^2}{||(h,k)||} \leq \frac{1}{2} \frac{h^2+k^2}{||(h,k)||} = \frac{||(h,k)||}{2} \longrightarrow 0 \ .$$

c) Tem-se, se $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2}{2x^2+y^4} - \frac{4x^3y^2}{(2x^2+y^4)^2} \ .$$

Se $y \neq 0$ obtém-se $\frac{\partial g}{\partial x}(y^2, y) = \frac{2}{9}$ e portanto g não é de classe C^1 porque $\frac{\partial g}{\partial x}$ não é contínua na origem devido a ter-se $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0$.