Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 7

(Teorema de Fubini)

1. Calcule o integral da função indicada no rectângulo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$.

   a) $f(x,y) = xy^3$.

   b) $f(x,y) = x\cos(xy)$.

   c) $f(x,y) = \begin{cases} ye^{xy}, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

2. Invertendo a ordem de integração, calcule:

   a) $\int_0^1 \left(\int_{2y}^2 \cos(x^2)\, dx \right) dy$.

   b) $\int_0^1 \left(\int_{\operatorname{arcsen} y}^{\pi/2} y \operatorname{sen} x\, dx \right) dy$.

3. Inverta a ordem de integração dos seguintes integrais duplos:

   a) $\int_0^1 \left(\int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy \right) dx$.

   b) $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{2-x} f(x,y) dy \right) dx$.

   c) $\int_{-2}^{-1} \left(\int_0^{2+x} f(x,y) dy \right) dx + \int_{-1}^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{2-|x|} f(x,y) dy \right) dx$.

4. Calcule a área da região

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < 2x < y < 3 - x^2\},$$

   usando um integral iterado da forma $\int (\int dx) dy$. Calcule ainda (usando a ordem de integração que entender) a coordenada x do centróide.

5. Escreva expressões para o volume de V na ordem indicada.

   a) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1, 0 \le z \le x + y\}$ nas ordens $\int \left(\int \left(\int dz \right) dx \right) dy$ e $\int \left(\int \left(\int dy \right) dx \right) dz$.

   b) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1 \ ; \ y^2 + z^2 \le 1\}$ nas ordens $\int \left(\int \left(\int dz \right) dx \right) dy$ e $\int \left(\int \left(\int dz \right) dy \right) dx$.

   c) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} \le y \le x \ ; \ 0 \le z \le x \ ; \ x \le 1\}$ nas ordens $\int \left(\int \left(\int dx \right) dz \right) dy$ e $\int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz$.

6. Para cada um dos conjuntos seguintes escreva uma expressão para o respectivo volume, usando um único integral triplo:

   a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} \le y \le x \ ; \ 0 \le z \le x \ ; \ x \le 1\}$,

   b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \le 1 \ ; \ 0 \le z \le x^2 - y^2 \ ; \ x > 0\}$.

7. Considere a região

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z \le 1 \ ; \ x + y - 2z \le 1 \ ; \ x \ge 0 \ ; \ y \ge 0\}.$$

   Calcule o volume de V na forma:

   a) $\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \cdots dy \right) dx \right) dz$.

   b) $\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \cdots dz \right) dx \right) dy$.

8. Calcule $\int_V f$ sendo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função definida por

   a) $f(x, y, z) = z$ e V o sólido limitado pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ e $z = x + y$.

   b) $f(x, y, z) = \frac{1}{(1+x+y+z)^3}$ e V o sólido limitado pelos planos coordenados e o plano $x+y+z = 1$.

9. Calcule a primeira coordenada do centróide do sólido limitado pela superfície $z = x^2 - y^2$, o plano xy e os planos $x = 0$ e $x = 1$.

10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que

$$2 \int_a^b \int_x^b f(x)f(y)\, dydx = \left(\int_a^b f(x)\, dx \right)^2 .$$

11. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Trocando a ordem de integração, mostre que

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_{1-x-y}^1 g(z)\, dzdxdy = \frac{1}{2} \int_0^1 g(z)z(2-z)\, dz.$$