

## Cálculo Diferencial e Integral II

### Ficha de trabalho 6

(Extremos condicionados)

- Para cada um dos casos seguintes, determine os extremos da função  $f$  no conjunto  $S$ :
  - $f(x, y) = x^4 + y^2$ ,  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ .
  - $f(x, y) = x^4 + y^2$ ,  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .
  - $f(x, y, z) = x + y + z$ ,  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$ .
  - $f(x, y, z) = z$ ,  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4; x + z = 1\}$ .
- Use o Método dos Multiplicadores de Lagrange para determinar os extremos absolutos da função  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - x - y$  na bola  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$ .
- Determine os ponto da superfície  $z = x^2 - y^2 + 1$  mais próximos da origem.
- Determine o ponto da reta  $y = x$  mais próximo da parábola  $y = x^2 + 2$ .
- Determine as dimensões da caixa rectangular com volume igual a  $1 \text{ m}^3$  que minimizam a respectiva área.
- Determine o valor máximo da área de um retângulo inscrito numa elipse de semieixos  $a$  e  $b$ .
- Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  definida positiva com valores próprios todos distintos. Prove que o ponto do elipsóide  $E = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle Ax, x \rangle = 1\}$  mais próximo (respetivamente, mais distante) da origem se encontra na direção do vetor próprio de  $A$  correspondente ao maior (respetivamente, menor) valor próprio.
- Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$  tal que a superfície  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$  é compacta, não vazia e satisfaz  $\nabla f(x) \neq 0$  para todo o  $x \in S$ . Mostre que a reta que une um dado ponto  $x_1 \notin S$  ao ponto  $x_0 \in S$  mais próximo de  $x_1$  intersecta  $S$  ortogonalmente em  $x_0$ .