Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 5

(Função Inversa. Função Implícita)

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x = 0\} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (xy, \frac{y}{x})$.
   a) Mostre que f não é injectiva.
   b) Determine um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ no qual f é injectiva.
   c) Mostre que f tem inversa local em torno do ponto $(2,2)$.
   d) Calcule $Df^{-1}(4,1)$, em que f^{-1} designa uma das funções inversas de f.

2. Mostre que a função $f(x,y,z) = (2e^{yz-1}, e^{xz-1}, -e^{xy-1})$ é invertível numa vizinhança do ponto $(1,1,1)$, com inversa de classe C^1, e calcule a derivada $Df^{-1}(2,1,-1)$.

3. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} u &= x + y + \operatorname{sen}(x-y) \\ v &= 1 + \log(1+xy) - x \end{cases}.$$

   Mostre que existe uma vizinhança de $(u,v) = (2, \log 2)$ e uma vizinhança de $(x,y) = (1,1)$ em que o sistema define (x,y) como função de classe C^1 de (u,v), e calcule $\frac{\partial y}{\partial v}(2, \log 2)$, usando:
   (a) O Teorema da Função Inversa.
   (b) O Teorema da Função Implícita.

4. Mostre que a equação $y \operatorname{sen}(x+y) = 0$ define implicitamente x como função de y nalguma vizinhança do ponto $(0,\pi)$, e calcule a derivada $\frac{dx}{dy}(\pi)$ desta função. Confirme o resultado explicitando x como função de y.

5. Mostre que a equação $2z + x^2z^5 + y^2x^3 + xy = 2$ define implicitamente z como função de (x,y) em torno do ponto $(0,0,1)$, e calcule a derivada parcial de segunda ordem $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(0,0)$.

6. Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ definido pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = x^2 + 1 \\ y^2 + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} z = 1 \end{cases}.$$

   a) Mostre que o conjunto S coincide com o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ nalguma vizinhança do ponto $(0,1,0)$, ou seja, duas das variáveis são funções da terceira.
   b) Calcule $f'(0)$.

7. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) \neq 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) \neq 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) \neq 0.$$

   Mostre que a equação $F(x,y,z) = 0$ determina localmente cada uma das variáveis como função de classe C^1 das restantes, e que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right)\left(\frac{\partial x}{\partial y}(y,z)\right)\left(\frac{\partial y}{\partial z}(x,z)\right) = -1.$$

8. Seja $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, e considere as funções $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dadas por $f_t(x) = f(x,t)$. Mostre que se a função f_0 possui um mínimo local em $x = a$, e a sua matriz Hessiana satisfaz $\det Hf_0(a) \neq 0$, então cada uma das funções f_t possui um mínimo local num ponto a_t próximo de a para $|t|$ suficientemente pequeno.