Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 4

(Derivadas de Ordem Superior. Extremos)

1. Calcule o gradiente e a matriz Hessiana de cada uma das seguintes funções:
   a) $f(x,y) = x\arctan y$
   b) $g(x,y,z) = \log(xy) + e^z$

2. Mostre que a função $V : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por $V(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ satisfaz
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{(equação de Laplace)}\,.$$

3. Seja $w(x,y) = f(y-x, x+y)$, em que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2. Mostre que se tem
$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v},$$
onde $u = y - x$ e $v = x + y$.

4. Escreva o polinómio de Taylor de segunda ordem da função $f(x,y) = e^x \cos(y)$ em torno do ponto $(1,0)$.

5. Determine e classifique os pontos de estacionaridade de cada uma das seguintes funções:
   a) $a(x,y) = x^2 - y^2 + xy$
   b) $b(x,y) = x^2 + y^2 - \dfrac{x^3}{3}$
   c) $c(x,y) = e^{xy+x-y}$
   d) $d(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$
   e) $e(x,y) = x^3 - y^2$
   f) $f(x,y) = x^4 - y^4$
   g) $g(x,y) = \dfrac{y^2}{2} + xy + x^4$
   h) $h(x,y,z) = xy + xz + yz - x + z$
   i) $i(x,y,z) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2y^2 + yz + z^2 + 4y + z$
   j) $j(x,y,z) = \cos(x)e^{-2y^2+yz-z^2}$

6. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x,y,z) = \left(x^2+y^2+z^2\right) e^{-x^2-y^2-z^2}$$

7. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função
$$f(x,y) = x^4 - y^4 - 2x^2 + 2ay^2$$
para cada valor do parâmetro $a \in \mathbb{R}$.

8. Seja A uma matriz $n\times n$ simétrica invertível, e $b \in \mathbb{R}^n$ um vetor. Mostre que a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = \langle Ax, x\rangle - 2\langle b, x\rangle$$
possui um único ponto de estacionaridade, dado por $x = A^{-1}b$. Mostre ainda que este ponto é um ponto de máximo, mínimo ou sela se e só se A é definida negativa, definida positiva ou indefinida.