Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 11

(Homotopia e Teorema de Green)

1. Considere o campo vetorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $F(x,y) = (-2y, x)$ e o conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \; ; \; y > |x|\}$. Calcule o trabalho realizado por F ao longo da fronteira do conjunto D no sentido anti-horário.

2. Use o Teorema de Green para calcular a área do conjunto definido por $x^2 + \dfrac{y^2}{4} < 1 \; ; \; x > 0$.

3. Considere o campo vetorial

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{y}{(x+1)^2 + y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{-(x+1)}{(x+1)^2 + y^2} \right).$$

Calcule o trabalho realizado por F ao longo de cada uma das linhas seguintes percorridas no sentido horário:

a) Circunferência definida pela equação $(x+1)^2 + y^2 = 1$.

b) Circunferência definida pela equação $(x-1)^2 + y^2 = 2$.

c) Elipse definida por $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

4. Considere o campo vetorial

$$H(x,y,z) = \left(\frac{z}{x^2 + z^2} + x, y, \frac{-x}{x^2 + z^2} + z \right).$$

a) Calcule o trabalho de H ao longo da elipse definida por $2(x-1)^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$, $z = 0$, percorrida num sentido à sua escolha.

b) Calcule o trabalho de H ao longo da linha definida por $x^2 + z^2 = 2$, $y + z = 1$, percorrida no sentido horário para um observador colocado no ponto $(0, 10, 0)$.

c) Será H um gradiente no seu domínio?

5. Considere o campo vetorial definido por

$$F(x,y,z) = \left(\frac{3y}{x^2 + y^2} - 2y, \frac{-3x}{x^2 + y^2} + 5x, z^2 \right).$$

a) Calcule o trabalho de F ao longo do caminho $g(t) = (1, 1, t), t \in [0, 5]$.

b) Calcule o trabalho de F ao longo da curva dada pelas equações $y = 1, x^2 + z^2 = 1$, orientada num sentido à sua escolha.

c) Calcule o trabalho de F ao longo da curva dada pelas equações $9x^2 + 4y^2 = 1$, $x + y + z = 1$, orientada no sentido anti-horário quando observada do ponto $(0, 0, 10)$.

6. Seja $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(a,b)\} \to \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 fechado. Mostre que existe um campo escalar $\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(a,b)\} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $A \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x,y) = A \left(\frac{-(y-b)}{(x-a)^2 + (y-b)^2}, \frac{(x-a)}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \right) + \nabla \phi.$$