Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 10

(Campos Fechados. Campos Gradientes. Teorema Fundamental do Cálculo)

1. Para cada um dos casos seguintes determine se o campo vetorial é ou não conservativo. Em caso afirmativo, calcule um potencial.

   a) $a(x, y) = (y^2, x^3)$.

   b) $b(x, y) = (x^3 + y, y^2 + x)$.

   c) $c(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

   d) $d(x, y, z) = (y, x, 2z)$.

   e) $e(x, y, z) = (-y, x, z)$.

   f) $f(x, y, z) = (2xe^{yz}, x^2ze^{yz}, x^2ye^{yz})$.

2. Considere o campo vetorial

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{y}{1 + x^2 + y^2}, 2z\right).$$

   a) Calcule o trabalho realizado pelo campo F ao longo da linha definida por

$$\{(\cos t, \operatorname{sen} t, t),\ 0 \leq t \leq 2\pi\}.$$

   b) Calcule o trabalho realizado pelo campo F ao longo da linha definida pelas equações

$$y^2 + z^2 = 1\ ;\ x = y^2 - z^2$$

   segundo um sentido à sua escolha.

3. Calcule o trabalho realizado pelo campo vetorial $G(x, y) = (y \exp(xy) + 2x, x \exp(xy))$ ao longo do caminho definido por $g(t) = (t^2 + 5t^4, \cos 2t), t \in [0, \pi]$.

4. Seja

$$F(x, y, z) = \left(\frac{3z}{x^2 + z^2} + \frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2}, -\frac{3x}{x^2 + z^2}\right).$$

   a) Calcule o trabalho de F ao longo da circunferência definida pelas equações $x^2 + z^2 = 1, y = 4$ orientada no sentido anti-horário quando vista do ponto $(0, 10, 0)$.

   b) Determine se F é um gradiente no seu domínio.

5. Seja $\alpha :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ contínua e $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Mostre que o campo vetorial radial

$$F(x, y) = \alpha(r) \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right)$$

   é conservativo em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.