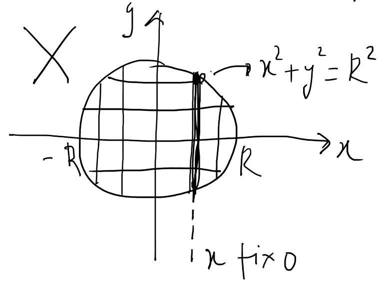
CDI-II

Mudança de variáveis.

Coordenadas Polares em $\mathbb{R}^2$. Área do círculo

Seja $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<R^2\}$ o círculo de centro na origem e raio R, representado na figura:



A respectiva área pode ser calculada usando o integral duplo:

$$Vol_2(X)=\iint_X 1\,dx\,dy = \int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy\right)dx$$

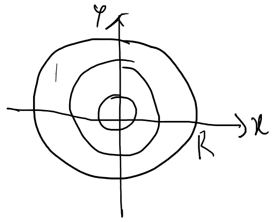
$$= \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2-x^2}\,dx = 4\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

É claro que é necessário usar uma mudança de variáveis para calcular o integral.

Em vez disso, podemos descrever o círculo X de outra forma.

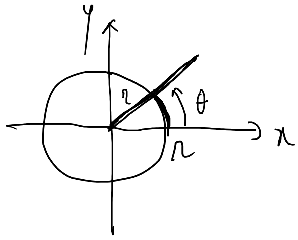
O círculo pode ser visto como uma colecção de circunferências, tal como se mostra na figura seguinte.

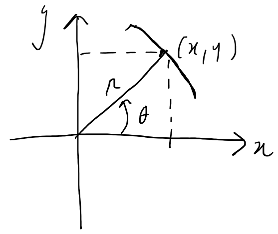
ferências, tal como se mostra na figura seguinte.



Cada uma das circunferências tem raio r, sendo $0 < r < R$.

Para distinguir os pontos de cada circunferência podemos usar o ângulo θ tal como se ilustra na figura seguinte:





Assim tem-se:

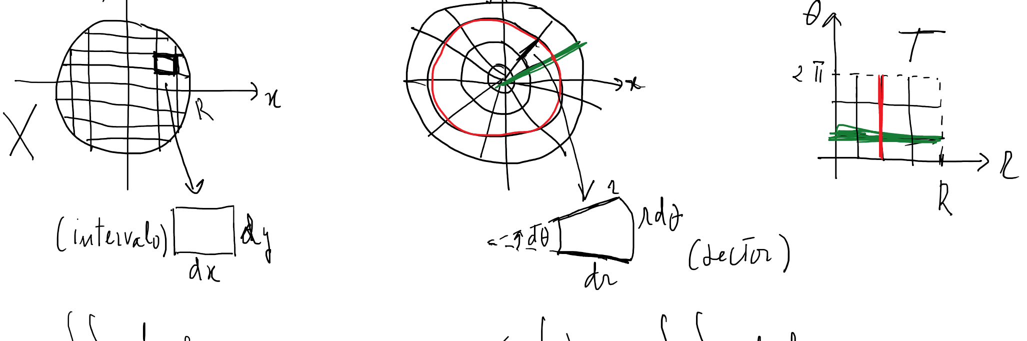
$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad ; \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

ou seja,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

Fixando r obtém-se uma circunferência e fixando θ obtém-se uma semi-recta a partir da origem.

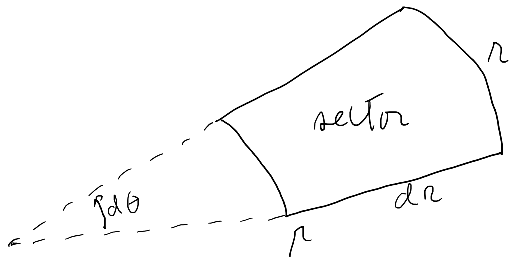
Portanto, podemos descrever o círculo de duas maneiras diferentes.



(a) $\iint_X dx\,dy$ (b) $\iint_T r\,dr\,d\theta$

Na versão (a) os <u>intervalos</u> não se "ajustam bem" à forma circular de X, ao passo que na versão (b) os sectores $\boxed{\text{ajustam-se}}$ na perfeição à forma circular.

Os sectores são limitados por arcos de circunferência e segmentos de recta que passam pela origem.



"quanto menor for o sector mais parece um rectângulo"

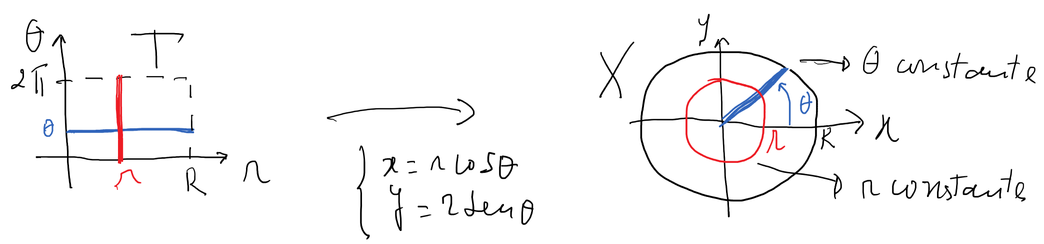
À medida que estes sectores se vão tornando cada vez menores, não é difícil admitir que a respectiva área é dada por $rd\theta dr$ ou $rdrd\theta$, porque "parecem" rectângulos.

Note-se que nas coordenadas (x,y) tem-se:

$$-R < x < R \; ; \; -\sqrt{R^2-x^2} < y < \sqrt{R^2-x^2}$$

ao passo que nas coordenadas (r,θ) tem-se:

$$0 < r < R \; ; \; 0 < \theta < 2\pi$$

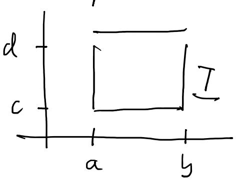


Portanto, a descrição nas coordenadas (r,θ) é mais simples da que é feita em coordenadas (x,y). O conjunto T é um intervalo!!!

— || —

Como veremos, a ideia de definição de área em $\mathbb{R}^2$

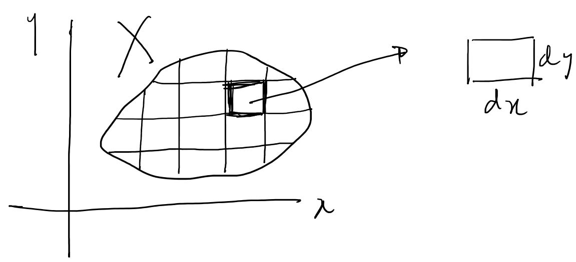
baseia-se no facto de que os intervalos $[a,b]\times[c,d]$



são os conjuntos mais simples para o cálculo da área.

$Vol_2(I) = (b-a)(d-c)$.

Assim, para calcular a área de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$, subdividimos X em intervalos cada vez menores de tal modo que a soma das áreas de todos esses intervalos é cada vez mais próxima da área de X. A área de cada um desses intervalos pode ser calculada de duas maneiras, ou na forma $dxdy$ ou $dydx$.



O limite (quando o número de intervalos cresce) da soma das áreas desses intervalos será, por definição, a área de X.

//

Voltando ao caso do círculo X, o famoso <u>teorema da mudança de variáveis</u> estabelecerá que a área de X pode ser calculada da seguinte forma:

$$Vol_2(X) = \iint_X 1\,dx\,dy = \iint_T r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R r\,dr\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2}\,d\theta = 2\pi\frac{R^2}{2} = \pi R^2 \;//$$

É de realçar que o integral duplo em T é muito simples.

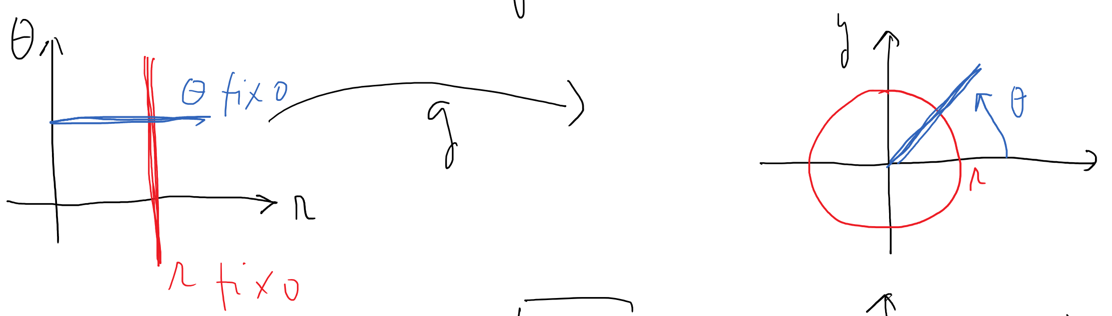
Às coordenadas (r,θ) dá-se o nome de coordenadas $\overline{\text{polares}}$ em $\mathbb{R}^2$.

Às coordenadas (r,θ) dá-se o nome de coordenadas $\boxed{\text{polares}}$ em $\mathbb{R}^2$

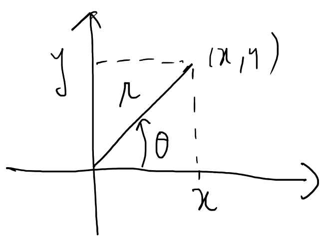
Seja $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por $g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

Esta função é de classe C^1 e permite exprimir as variáveis (x,y) em função das novas variáveis (r,θ). De facto tem-se:

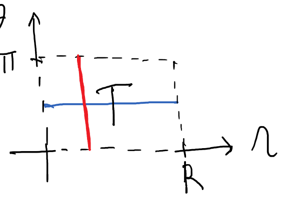
$$(x,y) = g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$



$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$



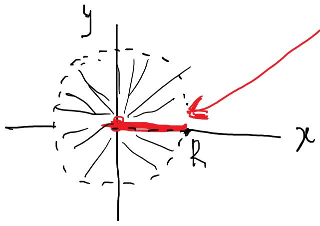
Note-se que se g for definida no intervalo aberto $]0,R[\times]0,2\pi[$, ou seja, $g: \underbrace{]0,R[\times]0,2\pi[}_{T} \longrightarrow \mathbb{R}^2$,



então, g passa a ser uma função injectiva e a respectiva imagem $g(T)$ é o conjunto

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < R^2\} \setminus \boxed{\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le x < R\}}$$

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<R^2\} \setminus \underbrace{\boxed{\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x<R\}}}_{\theta=0,\ \theta=2\pi}$$



ou seja, é o círculo de raio R e centro na origem sem o segmento de recta entre a origem e o ponto $(R,0)$.

Veremos que este segmento de recta tem área nula, ou seja, a área do círculo é a mesma que a do círculo sem este segmento de recta.

Sendo g de classe C^1, tem-se

$$\det Dg(r,\theta) = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r \neq 0$$

Portanto, a função $g:]0,R[\times]0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $g(r,\theta)=(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, é de classe C^1, injectiva e $\det Dg(r,\theta)\neq 0$.

Diz-se que g é uma $\boxed{\text{mudança de variáveis}}$.

O célebre teorema de mudança de variáveis (a apresentar mais tarde) estabelece:

$$\boxed{\iint_X f(x,y)\,dx\,dy = \iint_T f(g(r,\theta))\,|\det Dg(r,\theta)|\,dr\,d\theta}$$

$_X \qquad \iint_T$

em que $X = g(T)$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função cujo integral em X existe.

Para o caso $f(x,y) = 1$, o respectivo integral em X é a área de X.

Desto modo, ficam justificados os cálculos informais efectuados acima para encontrar a área do círculo centrado na origem e de raio R, ou seja, πR^2.