## Integrais Múltiplos. Aplicações.

1- Os integrais múltiplos (duplos em $\mathbb{R}^2$, triplos em $\mathbb{R}^3$) foram apresentados no cálculo de áreas em $\mathbb{R}^2$ e de volumes em $\mathbb{R}^3$.

Para $X \subset \mathbb{R}^2$, tem-se

$$\mathrm{vol}_2(X) = \int_X \left(\int 1\,dx\right)dy = \int_X \left(\int 1\,dy\right)dx$$

Para $X \subset \mathbb{R}^3$, tem-se

$$\mathrm{vol}_3(X) = \underbrace{\int_X \left(\int \left(\int 1\,dx\right)dy\right)dz = \cdots = \int_X \left(\int \left(\int dz\right)dy\right)dx}_{\text{6 maneiras diferentes de cálculo.}}$$

Notação a adoptar: para $X \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{vol}_n(X) = \int_X 1\,\underbrace{dx_1 dx_2 \cdots dx_n}_{dx} = \int_X 1\,dx$$

Em $\mathbb{R}^2$: $$vol_2(X) = \iint_X 1 \, dx \, dy$$

Este integral pode ser calculado de duas maneiras, $\int_{\cdots}^{\cdots}\left(\int_{\cdots}^{\cdots} dx\right) dy$ ou $\int_{\cdots}^{\cdots}\left(\int_{\cdots}^{\cdots} dy\right) dx$.

Em $\mathbb{R}^3$: $$vol_3(X) = \iiint_X 1 \, dx \, dy \, dz.$$

Este integral pode ser calculado de seis maneiras diferentes, por exemplo,

$$\int_{\cdots}^{\cdots}\left(\int_{\cdots}^{\cdots}\left(\int_{\cdots}^{\cdots} dz\right) dx\right) dy$$

Podemos generalizar o cálculo do integral para ~~[illegible]~~ outras funções.

Vamos considerar apenas funções contínuas nesta primeira abordagem.

Assim, para $f(x) = 1$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

tem-se, $$vol_n(X) = \int_X f(x) \, dx$$

Há grandezas físicas relevantes que são definidas à custa da noção de integral. Uma delas é o volume em $\mathbb{R}^3$ ou a área em $\mathbb{R}^2$, tal como ~~foi visto~~ apresentado anteriormente.

## 2- Grandezas físicas importantes

2.1 - $X \subset \mathbb{R}^n$, $vol_n(X) = \int_X 1\, dx$

$$n = 2 \longrightarrow \boxed{\text{área}}$$
$$n = 3 \longrightarrow \boxed{\text{volume}}$$

2.2 - Massa de um ~~c~~corpo. $X \subset \mathbb{R}^n$.

Seja $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\sigma(x) \geq 0$, a chamada <u>densidade de massa</u>.

O integral de $\sigma$ chama-se <u>MASSA</u> do corpo $X$. $M = M(X) = \int_X \sigma(x)\, dx$

2.3 - Centro de massa de $X \subset \mathbb{R}^n$

Seja $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\sigma(x) \geq 0$, a densidade de massa de $X$.

O centro de massa de $X$ é o ponto $\bar{x}$ cujas coordenadas são definidas por:

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$$

$$\bar{x}_k = \frac{1}{M} \int_X x_k \sigma(x)\, dx \quad , k = 1, 2, \dots, n.$$

2.4 - Momento de inércia de $X$ relativo a uma linha recta $L$.

Seja $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\sigma(x) \geq 0$, a densidade de massa de $X$ e $L$ uma linha recta em $\mathbb{R}^n$. Define-se momento de inércia de $X$ relativo à linha recta $L$ por:

$$I_L(X) = \int_X \sigma(x)\, d_L^2(x)\, dx$$

em que $d_L(x)$ é a distância de $x$ à linha recta $L$.

— " —

<u>Nota</u>: No caso em que $\sigma$ é constante ao centro de massa também se chama CENTRÓIDE do conjunto $X$.

— " —

<u>Exemplo</u>:

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1 \, ; \, 0 \leq y \leq 1 \, ; \, 0 \leq z \leq x+y\}$$

1- $\mathrm{Vol}_3(X) = \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^{x+y} 1 \, dz \right) dy \right) dx = 1.$

2- Seja $\sigma(x,y,z) = 1$. Então a massa de $X$ será dada por:

$$M = M(X) = \mathrm{Vol}_3(X) = 1$$

3- Para $\sigma(x,y,z) = 1$, o centro de massa de $X$ será o ponto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

dado por:

$$\bar{x} = \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^{x+y} x \, dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left( \int_0^1 x(x+y) \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left( x^2 + \frac{1}{2} \cancel{x} \right) dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$\bar{y} = \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^{x+y} y \, dz \right) dy \right) dx = \text{etc} \ldots$$

$$\bar{z} = \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^{x+y} z \, dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{(x+y)^2}{2} \, dy \right) dx = \text{etc} \ldots$$

4- O momento de inércia de $X$ relativo ao eixo $Oz$ será dado por

$$I_z(X) = \int_X \sigma(x,y,z)\, d_z^2(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$$

em que $d_z^2(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = x^2+y^2$.

Assim, tem-se

$$I_z(X) = \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^{x+y} (x^2+y^2)\, dz \right) dy \right) dx$$

$$= \text{etc} \ldots$$