CDI-II - 25/3/2020

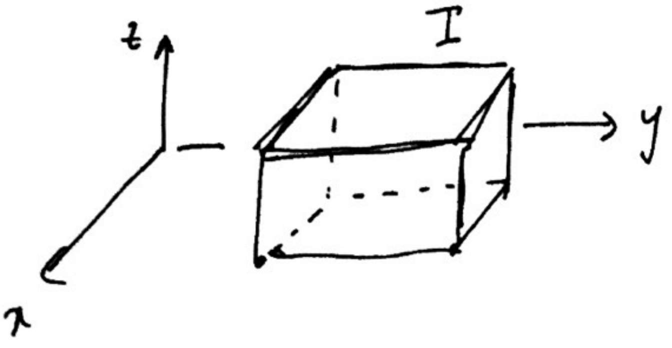
Integrais Múltiplos. Áreas. Volumes.

1- Sabendo calcular a área de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$, recorrendo aos cortes perpendiculares aos eixos coordenados, pretende-se generalizar este procedimento ao cálculo do volume em $\mathbb{R}^3$.

Seja $I = [a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ um intervalo em $\mathbb{R}^3$, ou seja,

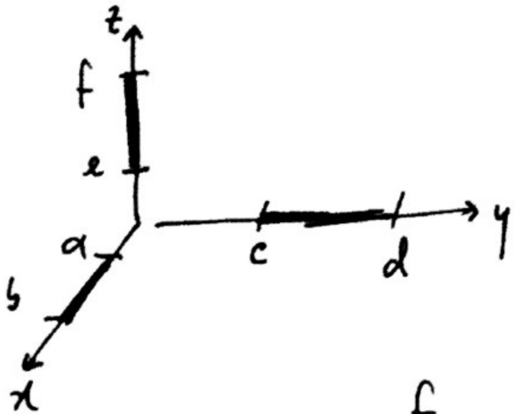
$$I = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : a\le x\le b\,;\ c\le y\le d\,;\ e\le z\le f\}$$

em que $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$.



O volume do intervalo I, designado por $vol_3(I)$ é o produto: $(b-a)\times(d-c)\times(f-e)$ em que $(b-a)$ é o comprimento, $(d-c)$ é a largura e $(f-e)$ é a altura de I.

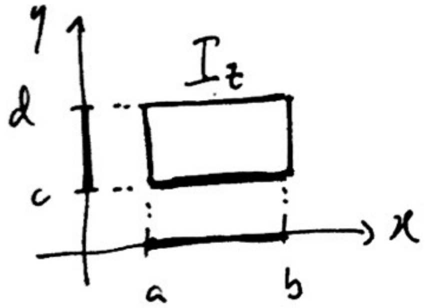
$$vol_3(I) = (b-a)\times(d-c)\times(f-e)$$



fazendo, $f-e = \int_e^f 1\,dz$, tem-se

$$vol_3(I) = \int_e^f (b-a)(d-c)\,dz \, .$$

Mas $(b-a)\times(d-c)$ é a área do rectângulo I_z.
(intervalo)



$$(b-a)\times(d-c) = vol_2(I_z)$$

Portanto,

$$vol_3(I) = \int_e^f vol_2(I_z)\,dz$$

ou seja, o volume de I é o integral das áreas dos conjuntos I_z, com $e \leq z \leq f$.

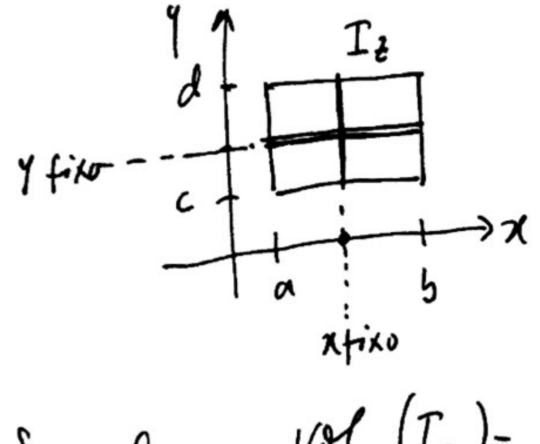
Note-se que para cada z fixo entre e e f tem-se sempre o mesmo intervalo I_z, porque o conjunto I é um intervalo (paralelepípedo).

Podemos então concluir que o cálculo do volume em $\mathbb{R}^3$, passa por saber descrever os "cortes" obtidos <u>fixando a variável z</u>.

Ora, a equação $z = c$ (constante) é um <u>plano</u> em $\mathbb{R}^3$.

A intersecção deste plano com o intervalo I chama-se <u>CORTE</u> em I perpendicular ao eixo $0z$.

Assim, o volume do intervalo I é o integral das áreas dos cortes I_z.



Sendo, $vol_2(I_z) = (b-a)\times(d-c)$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b dx \right) dy$$

Conclui-se que

$$\mathrm{vol}_3(I) = \int_e^f \mathrm{vol}_2(I_z)\,dz$$

$$= \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b dx \right) dy \right) dz$$

$$= \int_e^f \left(\int_a^b \left(\int_c^d dy \right) dx \right) dz$$

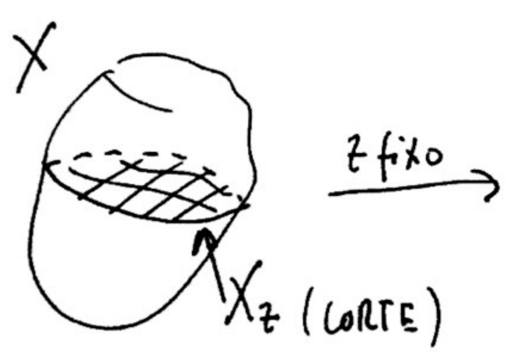
$\boxed{\text{integrais triplos iterados}}$!!!

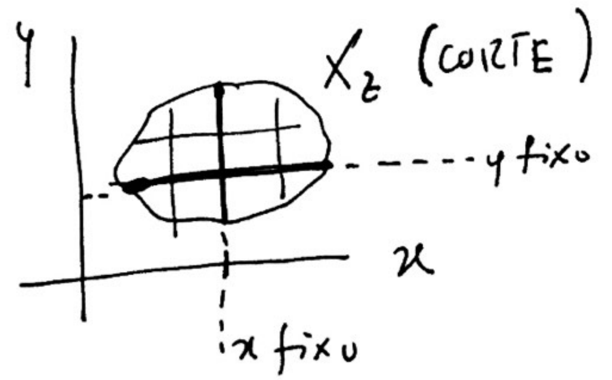
Em geral, dado $X \subset \mathbb{R}^3$, para calcular o respectivo volume, deveremos proceder do seguinte modo:

i) Determinar os cortes em X com z fixo obtendo uma figura plana, X_z.

ii) Determinar a área dos cortes X_z

iii) Integrar em z as áreas acima obtidas.





É claro que este procedimento pode ser aplicado para x e para y.

Deste modo temos 6 maneiras diferentes de calcular o volume de X.

Se X for um intervalo I é claro que estas 6 maneiras diferentes dão o mesmo valor.

O famoso teorema de FUBINI estabelece que o mesmo acontece para X.

<u>Conclusão</u>: Para calcular o volume de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^3$ devemos saber descrever os cortes em X.

2 - <u>Exemplos</u>

2.1. $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1 \,;\, 0 \leq y \leq 1 \,;\, 0 \leq z \leq x+y\}$

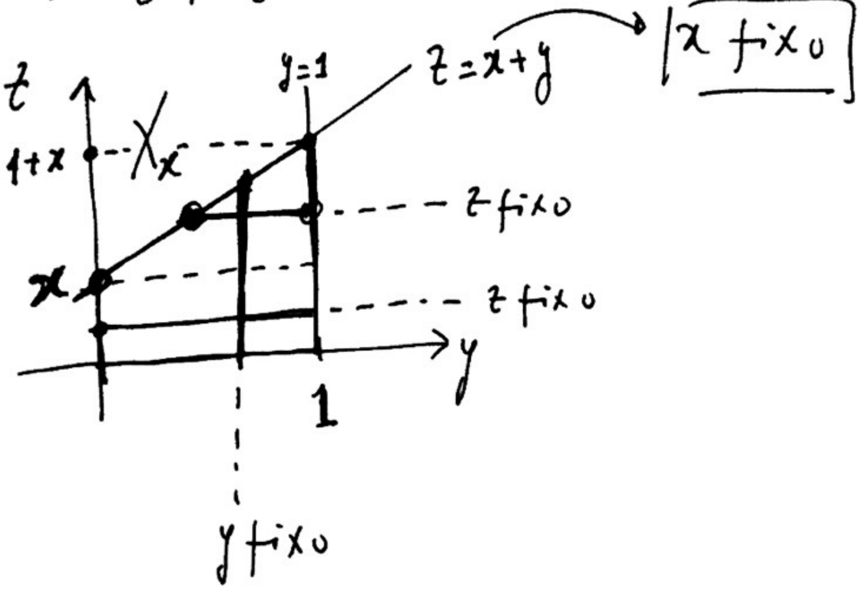
Note-se que o esboço de X não é fácil!

i) Cortes com x fixo:

Da definição de X, tem-se $0 \leq x \leq 1$.
Fixando x no intervalo $[0,1]$, o corte X_x obtido é dado por:

$$X_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq y \leq 1 \ ; \ 0 \leq z \leq x+y\}$$

com $x \in [0,1]$.



Assim, tem-se: $vol_3(X) = \int_0^1 vol_2(X_x)\,dx$

$$vol_2(X_x) = \int_0^1 \left(\int_0^{x+y} dz \right) dy =$$

$$= \int_0^x \left(\int_0^1 dy \right) dz + \int_x^{x+1} \left(\int_{z-x}^1 dy \right) dz$$

ou seja,

$$\mathrm{Vol}_3(X) = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{x+y} dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_0^1 dy \right) dz \right) dx + \int_0^1 \left(\int_x^{x+1} \left(\int_{z-x}^1 dy \right) dz \right) dx$$

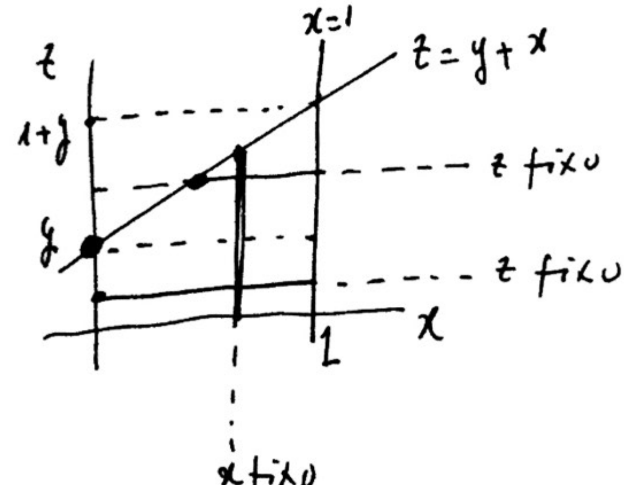
Usando a forma $dz\,dy\,dx$, tem-se

$$\mathrm{Vol}_3(X) = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = 1.$$

ii) <u>Cortes com y fixo</u>:

$0 \leq y \leq 1$, fixo. $\longrightarrow$ X_y corte com y fixo

$$X_y = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \,;\; 0 \leq z \leq y + x\}, \quad y \in [0,1].$$



etc.

iii) Cortes com z fixo:

Da definição de X, tem-se

$$0 \leq z \leq x+y \leq 1+1 = 2.$$

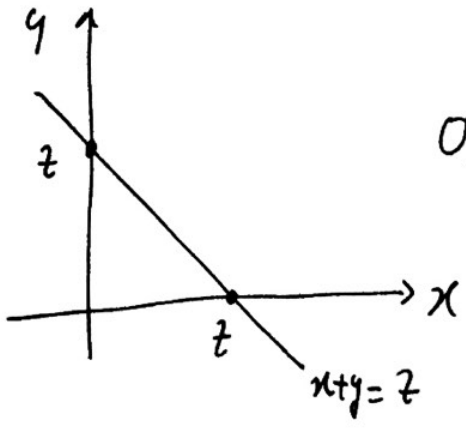
Portanto, z deverá ser fixado no intervalo $[0,2]$.

$$\boxed{0 \leq z \leq 2.}$$

Fixando z nesse intervalo obtem-se o corte

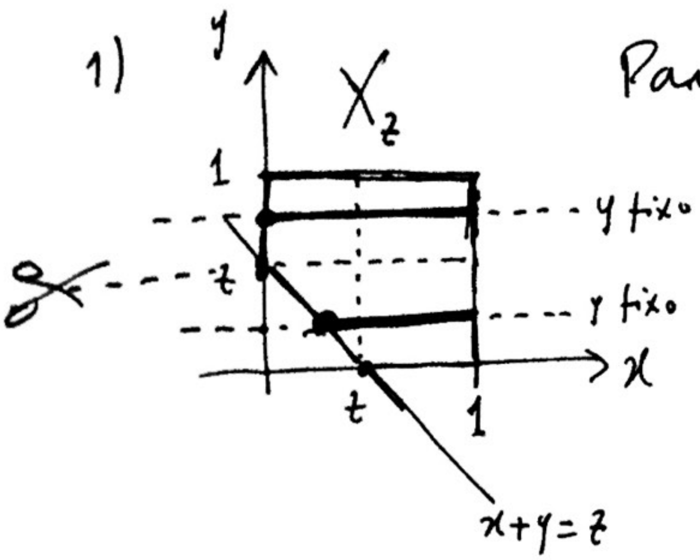
$$X_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 ;\ 0 \leq y \leq 1 ;\ \underbrace{x+y \geq z}_{!!!}\}$$

Note-se que a equação $x+y=z$, com z fixo, descreve uma recta tal como se indica na figura:



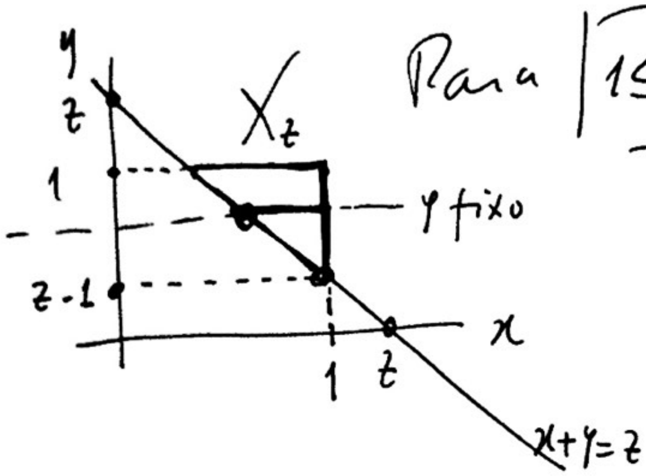
$0 \leq z \leq 2$

Dado que $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$, temos dois casos a considerar.

1) 

Para $\boxed{0 \leq z \leq 1}$

$$\mathrm{vol}_2(X_z) = \int_0^z \left(\int_{z-y}^1 dx \right) dy + \int_z^1 \left(\int_0^1 dx \right) dy$$

2) 

Para $\boxed{1 \leq z \leq 2}$

$$\mathrm{vol}_2(X_z) = \int_{z-1}^1 \left(\int_{z-y}^1 dx \right) dy$$

Assim, usando a forma $dx\,dy\,dz$, tem-se,

$$\mathrm{vol}_3(X) = \int_0^1 \left(\int_0^z \left(\int_{z-y}^1 dx \right) dy \right) dz + \int_0^1 \left(\int_z^1 \left(\int_0^1 dx \right) dy \right) dz +$$

$$+ \int_1^2 \left(\int_{z-1}^1 \left(\int_{z-y}^1 dx \right) dy \right) dz .$$