Integrais Múltiplos. Áreas, volumes

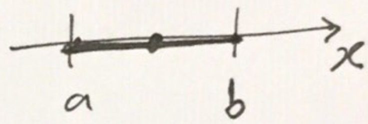
Recorde-se alguns resultados de CDI-I:

1. Teorema Fundamental do Cálculo:

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(t)\,dt$$

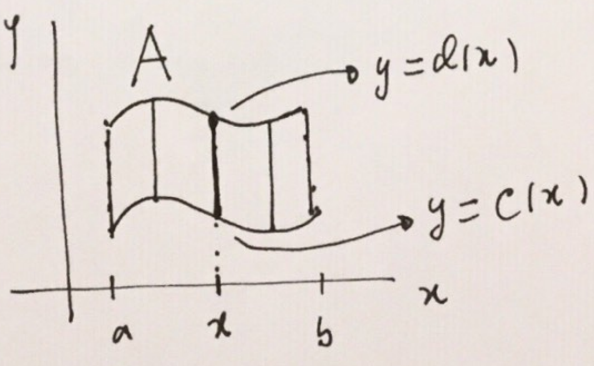
Fazendo $f(t)=t$, tem-se

$$\boxed{b-a=\int_a^b 1\,dt} \qquad (1)$$



e $(b-a)$ é o comprimento do segmento de recta $[a,b]\subset\mathbb{R}$. $\boxed{b-a=\int_a^b 1\,dx.}$

2. Seja $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ a\le x\le b\ ;\ c(x)\le y\le d(x)\}$ em que $c,d:[a,b]\to\mathbb{R}$ são contínuas.

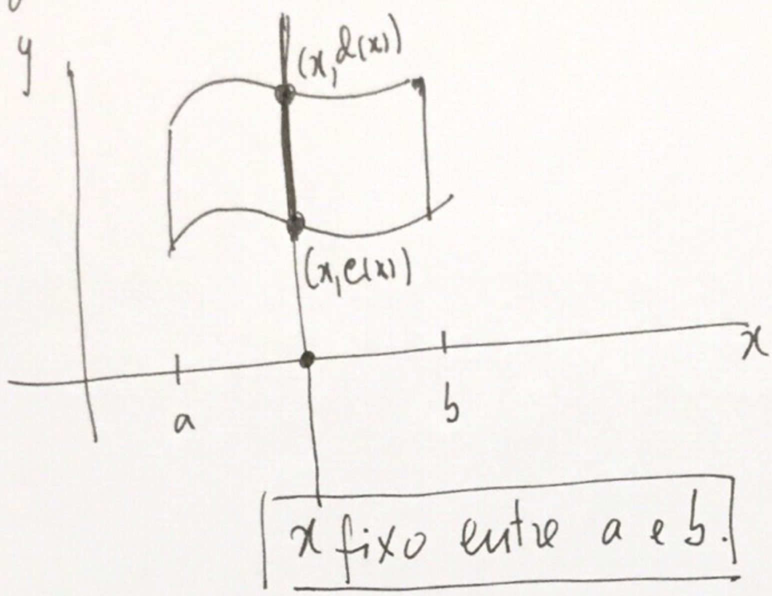


(2)

A área do conjunto A é dada pelo integral:

$$\int_a^b \left(d(x) - c(x)\right) dx$$

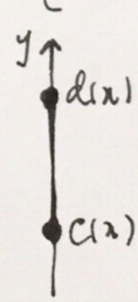
Note-se que $(d(x)-c(x))$ é o <u>comprimento</u> do segmento de recta assinalado nas figuras (2;3).



(3)

O comprimento do segmento de recta $[(x,c(x)),(x,d(x))]$ <u>vertical</u> é dado por:

$$d(x) - c(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} 1\,dy$$



Assim, a área do conjunto A é dada pelo integral:

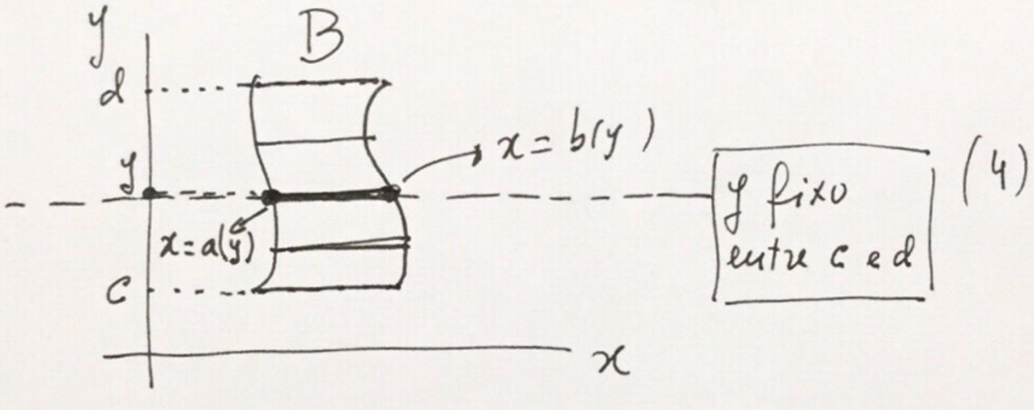
$$\int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} 1\,dy\right) dx$$

a que se chama <u>integral duplo iterado</u> da forma $\int(\int dy)\,dx$ ou $\iint dy\,dx$.

Assim, a área do conjunto A é dada por

$$\int_a^b \big(d(x)-c(x)\big)\,dx = \int_a^b\left(\int_{c(x)}^{d(x)} 1\,dy\right)dx$$

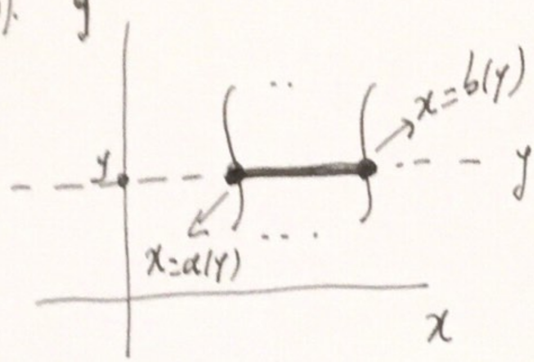
3 - Seja $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : c \le y \le d \,;\, a(y) \le x \le b(y)\}$ em que $a, b : [c,d] \to \mathbb{R}$ são contínuas.



A área do conjunto B é dada pelo integral

$$\int_c^d \big(b(y)-a(y)\big)\,dy$$

em que $b(y)-a(y)$ é o <u>comprimento</u> do segmento de recta $[(a(y),y),\,(b(y),y)]$ assinalado nas figuras (4;5).



(5)

$$b(y) - a(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} 1\,dx$$

$\Rightarrow$ A área do conjunto B é dada pelo integral duplo iterado

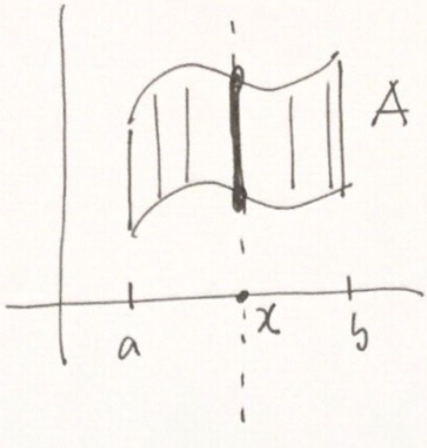
$$\int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} 1\,dx \right) dy$$

da forma $\int \left(\int dx \right) dy$ ou $\int\int dx\,dy$.

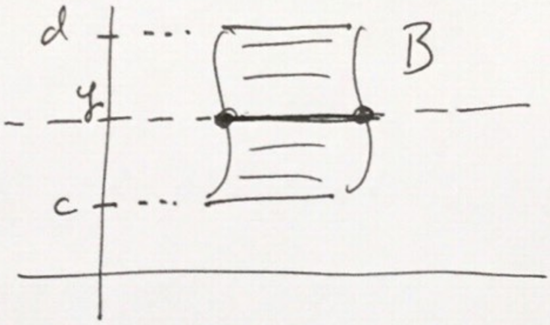
4- Pode-se concluir, dos dois casos descritos, que a $\boxed{\text{área}}$ de um conjunto em $\mathbb{R}^2$ é o integral ("soma") dos comprimentos dos segmentos de recta obtidos fixando uma das variáveis. ($\boxed{\text{integral de comprimentos}}$ ou soma de comprimentos)

$$\boxed{\text{Área} \equiv \text{integral de comprimentos}}$$

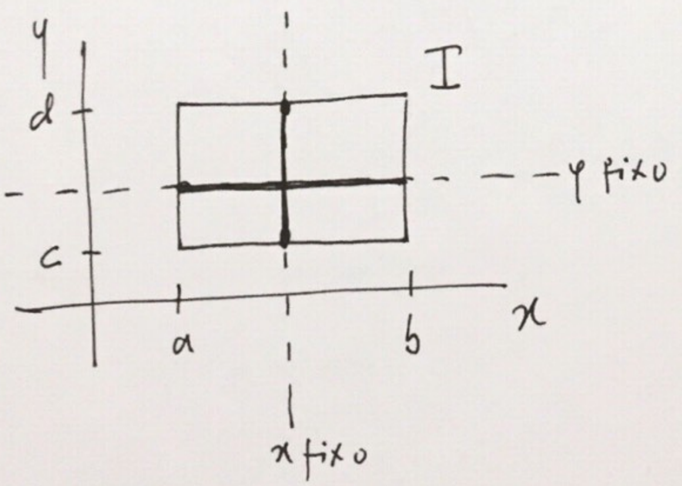
No caso A, os segmentos de recta são obtidos fixando x entre a e b.



No caso B, os segmentos de recta são obtidos fixando y entre c e d.



5- Caso simples: Intervalo em $\mathbb{R}^2$



$$I = [a,b] \times [c,d]$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b;\ c \le y \le d\}$$

A área do intervalo I, definido

por $I = [a,b] \times [c,d] = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \,;\, c \leq y \leq d \}$,

é dada pelos integrais duplos iterados:

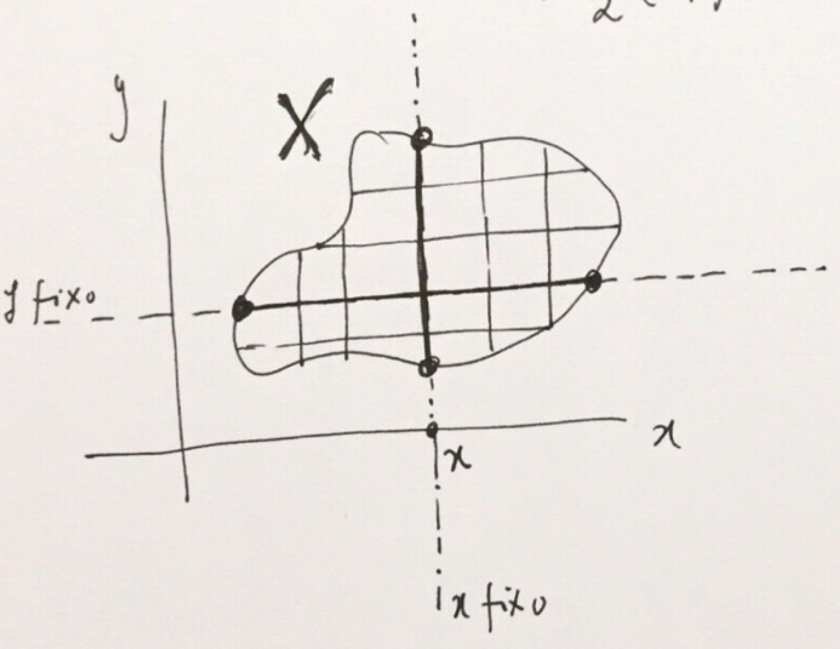
$$\int_a^b (d-c)\,dx = \boxed{\int_a^b \left(\int_c^d 1\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b 1\,dx \right) dy} = \int_c^d (b-a)\,dy$$

$$\int_a^b (d-c)\,dx = (d-c)\times(b-a) \qquad \int_c^d (b-a)\,dy = (b-a)\times(d-c)$$

porque $(b-a)\times(d-c) = (d-c)\times(b-a)$.

6- Passaremos a designar a área de um conjunto X em $\mathbb{R}^2$ pelo símbolo:

$$vol_2(X).$$



Para calcular a área de X deveremos ser capazes de descrever os segmentos de recta obtidos <u>fixando</u> uma das variáveis, x ou y.

Os segmentos de recta obtidos desta forma chamam-se $\boxed{\text{cortes}}$ em X. Cortes perpendiculares ao eixo Ox fixando x, ou cortes perpendiculares ao eixo Oy fixando y.

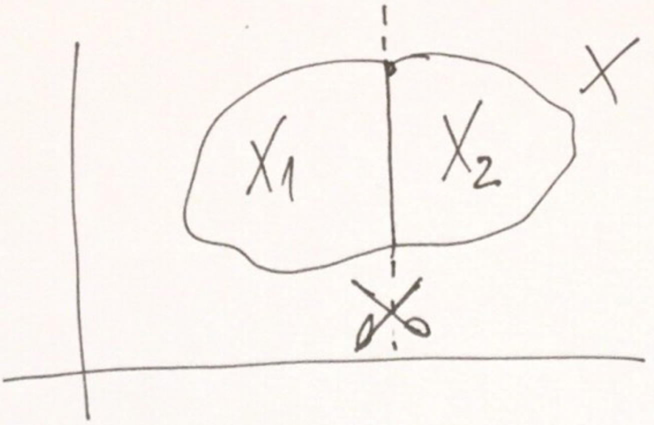
O famoso <u>teorema de Fubini</u>, a demonstrar mais tarde, estabelece que

$$\mathrm{vol}_2(X) = \int_{\cdots}^{\cdots}\left(\int_{\cdots}^{\cdots} 1\,dx\right)dy = \int_{\cdots}^{\cdots}\left(\int_{\cdots}^{\cdots} 1\,dy\right)dx .$$

Para o caso em que X é um intervalo I, este resultado é trivial como foi apresentado acima.

É intuitivamente claro que se $X = X_1 \cup X_2$ sendo X_1 e X_2 disjuntos, então tem-se

$$\mathrm{vol}_2(X) = \mathrm{vol}_2(X_1) + \mathrm{vol}_2(X_2)$$



É também intuitivamente claro que um segmento de reta em $\mathbb{R}^2$ tem área nula.

Portanto, dado $X \subset \mathbb{R}^2$, a respectiva área é calculada da seguinte forma:

i) Descrever os $\boxed{\text{cortes}}$ em X

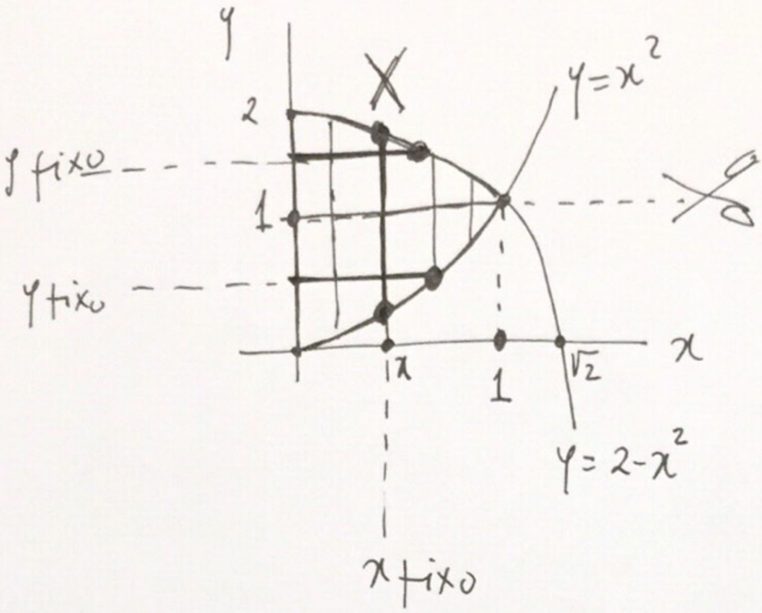
ii) Escolher uma das duas formas de cálculo: $\underbrace{\int\left(\int dx\right)dy}_{\boxed{dx\,dy}}$ ou $\underbrace{\int\left(\int dy\right)dx}_{\boxed{dy\,dx}}$.

Para $\int\left(\int dy\right)dx$ usam-se os cortes com x fixo.

Para $\int\left(\int dx\right)dy$ usam-se os cortes com y fixo.

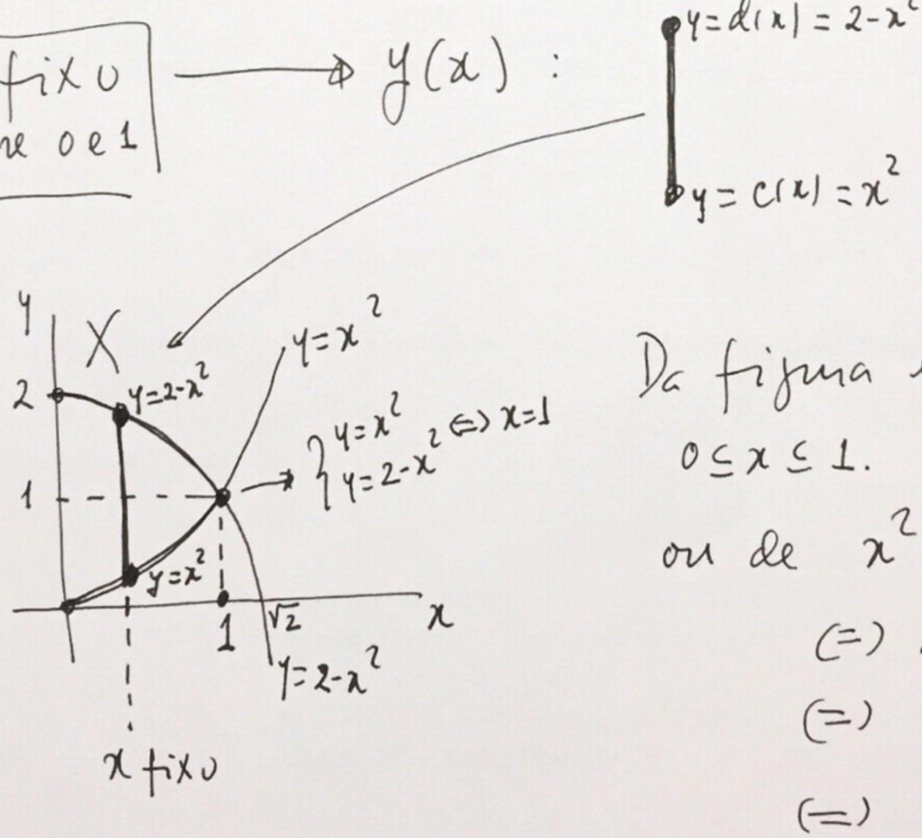
7- Exemplos

7.1 - $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2-x^2 ;\ x \geq 0\}$



i) Integral iterado da forma $\boxed{dy\,dx}$:

$\boxed{\text{x fixo entre 0 e 1}} \longrightarrow y(x)$: $y = d(x) = 2-x^2$, $y = c(x) = x^2$



Da figura é claro que
$0 \leq x \leq 1$.

ou de $x^2 \leq 2-x^2 ;\ x \geq 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 \leq 2 ;\ x \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 \leq 1 ;\ x \geq 0$

$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$.

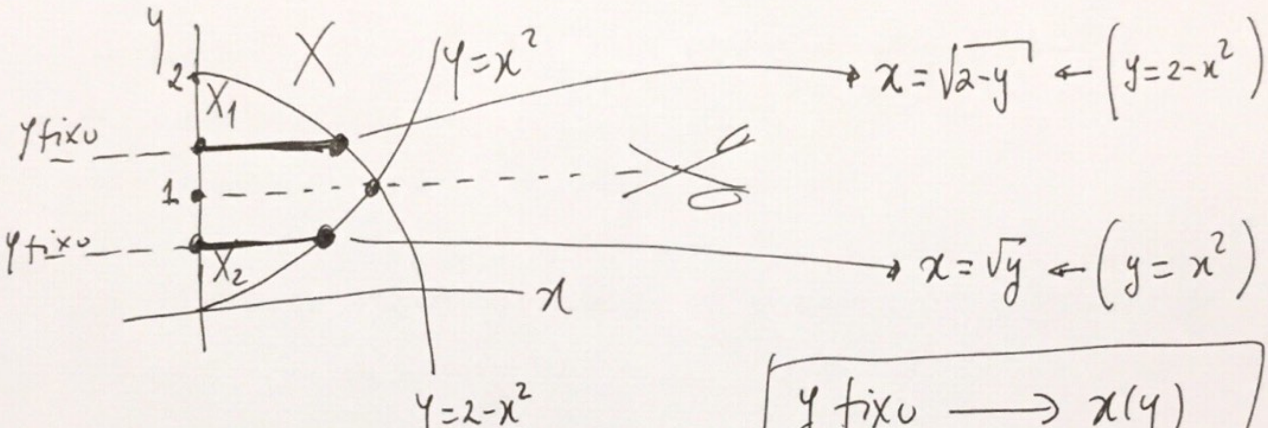
Note-se que os cortes com x fixo (entre 0 e 1) são todos do mesmo tipo: $c(x) = x^2$; $d(x) = 2-x^2$.

Assim,

$$vol_2(X) = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{2-x^2} dy \right) dx = \int_0^1 (2-x^2-x^2)\,dx$$

$$= 2\int_0^1 (1-x^2)\,dx = 2\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

ii) Integral iterado da forma $\boxed{dx\,dy}$,



$\boxed{y \text{ fixo} \longrightarrow x(y)}$

$$X = X_1 \cup X_2$$

Da figura é claro que há dois tipos de cortes com y fixo.

Em X_1 $(1 \leq y \leq 2)$ tem-se $0 \leq x \leq \sqrt{2-y}$.

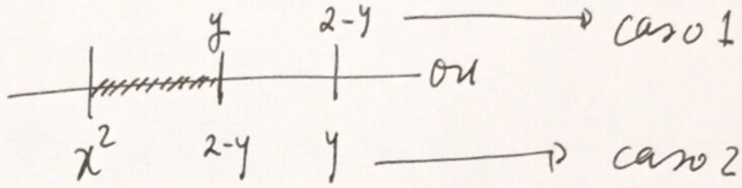
Em X_2 $(0 \leq y \leq 1)$ tem-se $0 \leq x \leq \sqrt{y}$.

Alternativamente (sem considerar a figura), tem-se,

$$0 \leq x^2 \leq y \leq 2-x^2 \leq 2,$$

ou seja, y deverá ser fixado no intervalo $[0,2]$. Tendo fixado y (corte com y fixo), deveremos determinar os extremos para x, ou seja, da definição de X vem:

$$\begin{cases} x^2 \leq y \\ x^2 \leq 2-y \end{cases}$$



de onde se conclui que há dois casos a considerar:

1) $\begin{cases} x^2 \leq y \\ x \geq 0 \end{cases} \iff 0 \leq x \leq \sqrt{y}$ se $y \leq 2-y \iff 2y \leq 2 \iff y \leq 1.$

Fixando y entre 0 e 1, tem-se $0 \leq x \leq \sqrt{y}$

2) $\begin{cases} x^2 \leq 2-y \\ x \geq 0 \end{cases} \iff 0 \leq x \leq \sqrt{2-y}$ se $2-y \leq y \iff y \geq 1.$

Fixando y entre 1 e 2, tem-se $0 \leq x \leq \sqrt{2-y}$.

Portanto, a área de X será a soma de dois integrais duplos iterados.

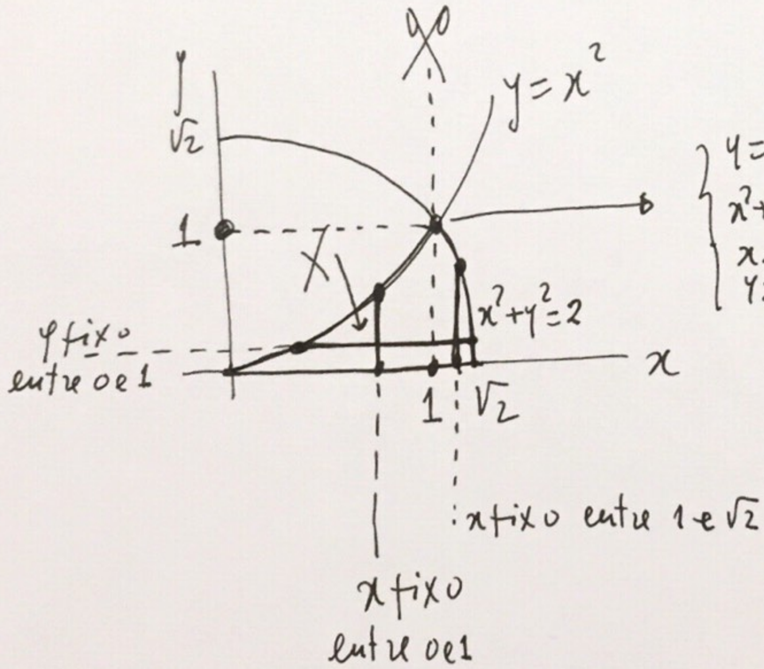
$$\mathrm{vol}_2(X) = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{2-y}} dx \right) dy \quad .$$

$$= \int_0^1 \sqrt{y}\, dy + \int_1^2 \sqrt{2-y}\, dy \qquad \text{etc.}$$

$$\overset{\cdots}{=} \frac{4}{3}$$

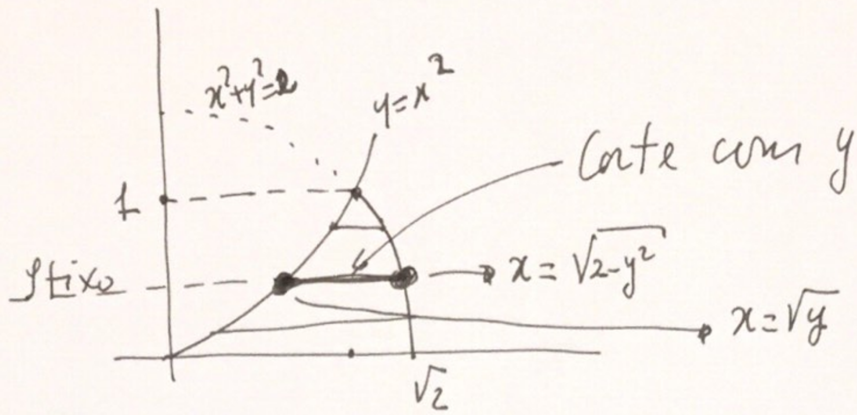
Conclui-se que a forma $dy\,dx$ é mais simples do que a forma $dx\,dy$.

7.2 - $X = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ x^2+y^2 \leq 2 ; \ 0 \leq y \leq x^2 ; \ x \geq 0 \}$



$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2+y^2 = 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2+y-2=0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

i) Integral iterado da forma $dxdy$:

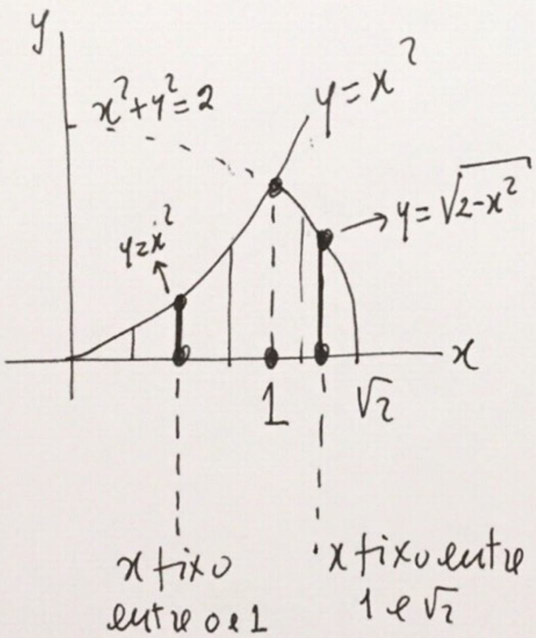


Os cortes com y fixo são do mesmo tipo.

$0 \le y \le 1 \quad , \sqrt{y} \le x \le \sqrt{2-y^2}$

$$\mathrm{vol}_2(X) = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} dx \right) dy$$

ii) Integral iterado da forma $dydx$:



Há dois tipos de cortes para x fixo.

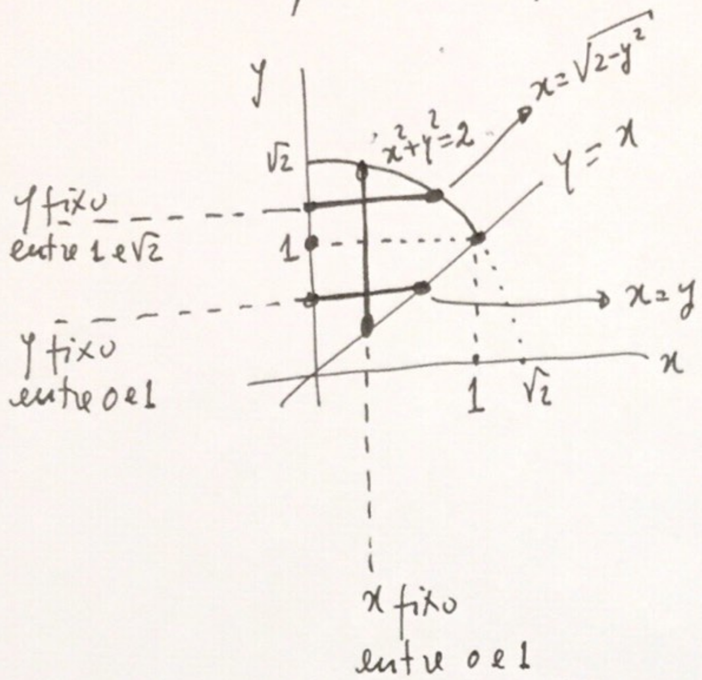
1) Para $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x^2$

2) Para $1 \le x \le \sqrt{2}$, $0 \le y \le \sqrt{2-x^2}$

$$\mathrm{vol}_2(X) = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} dy \right) dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2-x^2}} dy \right) dx .$$

7.3 $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le y \le \sqrt{2-x^2}\}$

Note-se que $y \le \sqrt{2-x^2} \iff y^2 + x^2 \le 2$.



$\boxed{x \text{ fixo}}$: $0 \le x \le \sqrt{2-x^2} \iff$

$x \ge 0$; $x^2 \le 2 - x^2 \iff$

$x \ge 0$; $2x^2 \le 2 \iff x^2 \le 1$.

$\iff 0 \le x \le 1$

i) Integral da forma $dy\,dx$: x fixo $\longrightarrow y(x)$

Da figura é claro que $0 \le x \le 1$ e $x \le y \le \sqrt{2-x^2}$

$$\mathrm{vol}_2(X) = \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{2-x^2}} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\sqrt{2-x^2} - x \right) dx, \text{ etc...}$$

ii) Integral da forma $dx\,dy$: y fixo $\longrightarrow x(y)$

Há dois casos a considerar.

Para $0 \le y \le 1$, tem-se $0 \le x \le y$.

Para $1 \le y \le \sqrt{2}$, tem-se $0 \le x \le \sqrt{2-y^2}$

$$\mathrm{vol}_2(X) = \int_0^1 \left(\int_0^y dx \right) dy + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2-y^2}} dx \right) dy .$$

Alternativamente, sem ajuda da figura tem-se:

i) Para a forma $dy\,dx$:

$$x \leq \sqrt{2-x^2}\ ;\ x \geq 0 \iff$$

$$x^2 \leq 1\ ;\ x \geq 0 \iff$$

$$0 \leq x \leq 1.$$

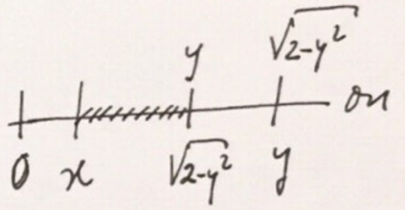
Para x fixo $(0 \leq x \leq 1)$, $x \leq y \leq \sqrt{2-x^2}$.

ii) Para a forma $dx\,dy$:

$$0 \leq x \leq y \leq \sqrt{2-x^2} \leq \sqrt{2} \implies 0 \leq y \leq \sqrt{2}$$

Fixando y $(0 \leq y \leq \sqrt{2})$ tem-se,

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ y^2 \leq 2-x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ x \leq \sqrt{2-y^2} \end{cases}$$



ou seja, há dois casos a considerar.

- $y \leq \sqrt{2-y^2} \iff 2y^2 \leq 2 \iff y^2 \leq 1 \implies 0 \leq y \leq 1$
- $\sqrt{2-y^2} \leq y \iff y \geq 1.$

—————— // ——————

N.B.: É claro que o esboço do conjunto X facilita bastante a análise.

7.4 - Área em $\mathbb{R}^2$ (conclusão)

Dado $X \subset \mathbb{R}^2$, o cálculo da respectiva área depende dos cortes perpendiculares aos eixos coordenados, Ox e Oy.

É muito importante saber esboçar o conjunto e representá-lo da forma: