Extremos de funções escalares

1- Dada $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2, os respectivos pontos de extremo são determinados em várias etapas:

i) Pontos críticos : $\nabla f(x) = 0$

ii) Classificação dos pontos críticos:

sinal de $g''(0) = v^T D^2 f(a)\, v$

em que $\underline{a}$ é um ponto crítico de f.

e $D^2 f(a)$ é a matriz Hesseana:

$$D^2 f(a) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}_{n \times n} & \leftarrow k \\ \uparrow j & \end{array}$$

Esta matriz é <u>simétrica</u>:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}, \quad j \neq k \quad (\underline{\underline{\text{Schwarz}}})$$

$D^2f(a)$ é diagonalizável, tem valores próprios reais e os vectores próprios constituem uma base ortonormada de $\mathbb{R}^n$.

Basta então considerar que v é um desses vectores próprios: $D^2f(a)v = \lambda v$.

$$g''(0) = v^T D^2f(a) v = v^T(\lambda v) = \lambda v^T v$$
$$= \lambda \|v\|^2$$

Portanto, o sinal de $g''(0)$ é o sinal de λ.

i) valores próprios todos positivos: a é um ponto de mínimo de f.

ii) valores próprios todos negativos: a é um ponto de máximo de f.

iii) dois valores próprios com sinais opostos: a é um ponto de sela (nem máximo, nem mínimo)

iv) um valor próprio nulo e os restantes todos do mesmo sinal: a natureza do ponto a deverá ser determinada pela análise directa de f numa vizinhança de a. (ANÁLISE LOCAL)

2 - Exemplos

2.1 - $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$

<u>Pontos críticos</u> : $Df(x,y) = (0,0)$

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x + 2y = 0 \end{array} \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

$(0,0)$ é o único ponto crítico de f.

<u>Classificação</u> : Matriz Hesseana em $(0,0)$

$$D^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \equiv \left(\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \right)$$

$$D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

<u>valores próprios</u> : $\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$

$$(2-\lambda)^2 - 1 = 0 \iff 2-\lambda = 1 \vee 2-\lambda = -1$$

$$\iff \lambda = 1 \vee \lambda = 3$$

Os valores próprios são positivos : $(0,0)$ é um ponto de mínimo de f.

2.2 - $f(x,y) = xy + y^3$

Pontos críticos : $Df(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y = 0 \qquad\qquad \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 3y^2 = 0$$

$(0,0)$ é o único ponto crítico de f.

classificação : Matriz Hesseana em $(0,0)$

$$D^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6y \end{bmatrix} \Rightarrow D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

valores próprios : $\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = -1$

os valores próprios têm sinais opostos :

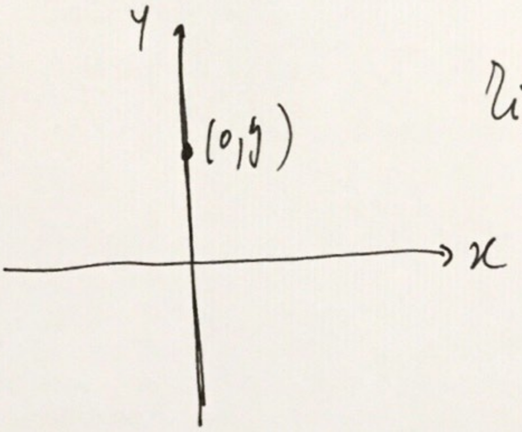
$(0,0)$ é um ponto de sela (não é ponto de extremo)

2.3 - $f(x,y) = x^3 + x^2 y$

Pontos críticos: $\nabla f(x,y) = (0,0)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Os pontos $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$, são críticos.



Eixo Oy é o conjunto de pontos críticos de f.

<u>Classificação</u>: Matriz Hesseana

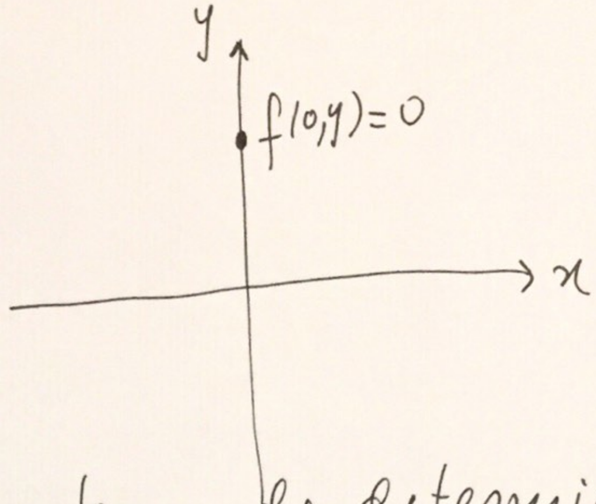
$$D^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x+2y & 2x \\ 2x & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow D^2 f(0,y) = \begin{bmatrix} 2y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os valores próprios são $2y$ e 0.

Portanto, devemos fazer a análise local da função f em torno dos pontos do eixo Oy.

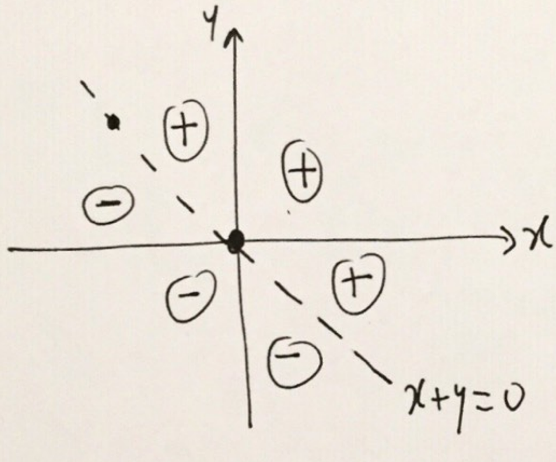
$$f(x,y) = x^3 + x^2 y = x^2(x+y)$$

$$f(0,y) = 0$$



Sendo $f(0,y)=0$, temos de determinar o sinal de f em torno dos pontos $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Note-se que $f(x,y)=0 \iff x=0 \vee x+y=0$

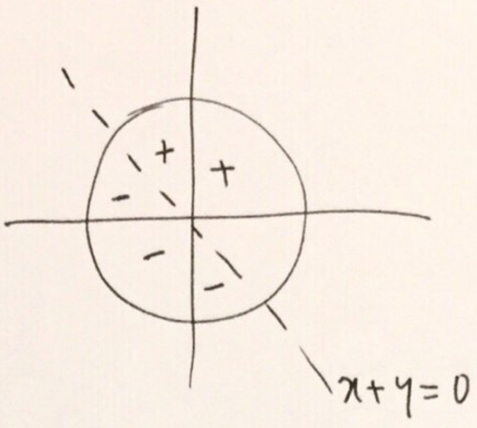


- f é nula no eixo Oy e na recta $x+y=0$
- f é positiva no ~~semiplano~~ conjunto $x+y>0$, $x \neq 0$
- f é negativa no conjunto $x+y<0$, $x \neq 0$

tal como se mostra na figura.

Assim, tem-se:

1) $(0,0)$ é um ponto de sela



2) Os pontos $(0,y)$, $y>0$ são pontos de mínimo de f.

3) Os pontos $(0,y)$, $y<0$ são pontos de máximo de f.