CDI-II - 18/3/2020

Derivadas de ordem superior. Fórmula de Taylor

1- Derivadas de ordem superior

1.1. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, diferenciável

$\frac{\partial f}{\partial x_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ derivadas parciais

<u>Exemplo:</u> $f(x,y) = x^2 y + y^3 x$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 3y^2 x$$

1.2. Se f e $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ forem continuas ~~diferenciáveis~~ ~~...~~, diz-se que f é de classe C^1.

Notação: $f \in C^1$

1.3. Se as derivadas parciais forem diferenciáveis, geram as derivadas de segunda ordem

<u>Exemplo</u>: $f(x,y) = x^2 y + y^3 x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^3 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2y, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \boxed{2x + 3y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2 x \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \boxed{2x + 3y^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 6yx$$

Notação: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Em geral:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$$

<u>Nota</u>: No exemplo verifica-se a igualdade:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

1.4 - Se f, $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ forem funções contínuas ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~, diz-se que f é de classe C^2. ($f \in C^2$)

<u>Lema de Schwarz</u>: Se f for de classe C^2

então $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}, \quad j \neq k.$$

— || —

1.5 - <u>Fórmula de Taylor</u>

Recordar CDI-I: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$

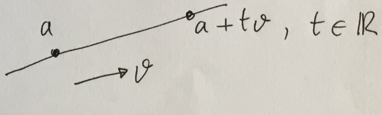
$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2} f''(0) t^2 + o(t^2)$$

— || —

Em $\mathbb{R}^n$, pretende-se fazer o mesmo, mas temos mais do que uma variável.

<u>Truque</u>: Estudar a função restringida a uma linha recta. (n variáveis $\longrightarrow$ 1 variável)

Recta que passa num ponto $a \in \mathbb{R}^n$ e na direcção de um vector $v \in \mathbb{R}^n$:



Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, dada por

$$\gamma(t) = a + tv.$$

A recta é a <u>imagem</u> da função γ !!!

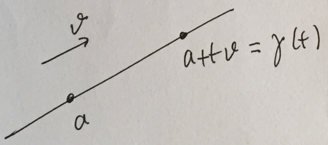
A função γ é contínua e diferenciável!

$$\boxed{\gamma'(t) = v}$$

Considere-a função composta:

$$t \longmapsto \gamma(t) \longmapsto f(\gamma(t))$$

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$



Assim, a função $g = f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a restrição de f à recta e é uma função real de variável real !!!