Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Exercícios Resolvidos

A Saga Gaudêncio

Exercício 1 *O Sr. Gaudêncio tem uma horta rectangular descrita pelo intervalo*

$$I = [0,4] \times [1,6] \subset \mathbb{R}^2$$

A horta encontra-se sub-dividida em quatro rectângulos mais pequenos

$$I_1 = [0,2] \times [1,2];\ I_2 = [0,2] \times [2,6];\ I_3 = [2,4] \times [1,2];\ I_4 = [2,4] \times [2,6].$$

Todos estes comprimentos encontram-se em metros (m).
Em cada sub-rectângulo I_j encontra-se plantada uma espécie diferente de batata transgénica tal que a produção anual de batata por unidade de área é, respectivamente:

$$\rho_1 = \pi;\ \rho_2 = 3;\ \rho_3 = \sqrt{2}e;\ \rho_4 = 5 \quad \text{(em unidades de } Kg/(m^2 \times ano)).$$

Utilizando uma função em escada apropriada calcule a produção anual de batata (em Kg) conseguida pelo Sr. Gaudêncio.

Resolução: Considere-se a partição do intervalo I dada pelos intervalos I_j e considere-se a função em escada $\rho : I \to \mathbb{R}$ definida por $\rho(x,y) = \rho_j$ se $(x,y) \in int(I_j)$ em que

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \pi \\ \rho_2 &= 3 \\ \rho_3 &= \sqrt{2}e \\ \rho_4 &= 5 \end{aligned}$$

A massa de batata em cada intervalo I_j é o produto da área de I_j pelo respectivo valor da função ρ.

A massa de batata em Kg, produzida num ano em I, é dada pelo integral da função ρ:

$$\int_I \rho = \sum_{j=1}^{4} \rho_j vol(I_j) = \pi \times 2 + 3 \times 8 + \sqrt{2}e \times 2 + 5 \times 8 = 64 + 2\sqrt{2}e + 2\pi$$

A produção anual de batata é então de $64 + 2\sqrt{2}e + 2\pi\ Kg$.

Note-se que não é relevante especificarmos o valor da função em escada ρ na fronteira dos sub-intervalos I_j uma vez que esses valores não vão afectar o valor do integral (a fronteira de um intervalo tem medida nula).

O integral é obtido pela soma dos volumes-3 de quatro paralelipípedos-3, P_j com $j = 1,2,3,4$, cuja base é o intervalo I_j e cuja altura é dada por ρ_j.

Exercício 2 *No ano de 2075 o Comodoro Gaudêncio IV, bisneto do Sr. Gaudêncio do exercício 1, é escolhido, por ter tido boa nota a AMIII, como engenheiro responsável pelo abastecimento de ar a naves espaciais. Sabe-se que uma nave espacial, quando está parada na estação orbital, ocupa a seguinte região (a unidade de escala é o metro):*

$$
\begin{aligned}
A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad & 0 \le x \le 4 - \frac{1}{50}(y^2+z^2), \qquad \text{se } y^2+z^2 \le 100\ ; \\
& 0 \le x \le 2 - \frac{1}{100}(y^2+z^2), \qquad \text{se } y^2+z^2 > 100\}\ .
\end{aligned}
$$

Escreva as expressões que o Comodoro Gaudêncio IV deve obter para a massa de ar (em kg) necessária para a nave espacial (a densidade do ar na nave espacial deve ser de $1.2\ kg/m^3$*):*

a) *integrando primeiro em ordem a z, depois em ordem a y e por fim em ordem a x (isto é* $\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots} c\ dz)dy)dx$, *onde c é uma constante que também deve determinar).*

b) *integrando primeiro em ordem a z, depois em ordem a x e por fim em ordem a y (isto é* $\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots} c\ dz)dx)dy$*).*

Resolução: Na figura 1, extraída do bloco de notas do Comodoro Gaudêncio, encontra-se a representação gráfica da nave espacial em que o eixo Ox se encontra orientado verticalmente.

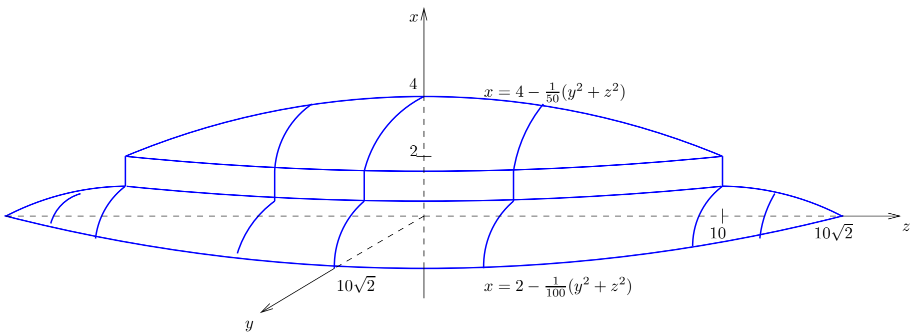

Figura 1: A nave espacial

a) A massa de ar é dada pelo integral $M = 1.2 \int_A dxdydz$. Das inequações e da figura 1 facilmente se conclui que os cortes da nave espacial com planos perpendiculares ao eixo Ox, $0 < x < 4$, são discos com centro na origem e raio $R(x)$ dado por

$$
R(x) = \sqrt{y^2+z^2} = \begin{cases} 10\sqrt{2-x} & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 10 & \text{se } 1 \le x \le 2 \\ \sqrt{50(4-x)} & \text{se } 2 \le x \le 4\ . \end{cases} \tag{1}
$$

Devido à simetria circular da nave em torno do eixo Ox, a massa é então dada por

$$
\begin{aligned}
M &= 1.2 \int_0^4 \left(\int_{-R(x)}^{R(x)} \left(\int_{-\sqrt{R^2(x)-y^2}}^{\sqrt{R^2(x)-y^2}} 1\ dz \right) dy \right) dx = \\
&= 1.2 \times 4 \int_0^4 \left(\int_0^{R(x)} \left(\int_0^{\sqrt{R^2(x)-y^2}} 1\ dz \right) dy \right) dx
\end{aligned}
$$

e portanto, tendo em conta (1), temos

$$
\begin{aligned}
M &= 4.8\int_0^1 \left(\int_0^{10\sqrt{2-x}} \left(\int_0^{\sqrt{100(2-x)-y^2}} 1\ dz\right) dy\right) dx + \\
&+ 4.8\int_1^2 \left(\int_0^{10} \left(\int_0^{\sqrt{100-y^2}} 1\ dz\right) dy\right) dx + \\
&+ 4.8\int_2^4 \left(\int_0^{\sqrt{50(4-x)}} \left(\int_0^{\sqrt{50(4-x)-y^2}} 1\ dz\right) dy\right) dx
\end{aligned}
$$

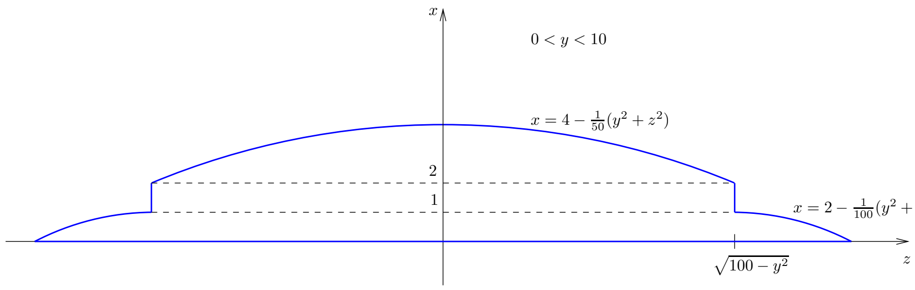

Figura 2: Corte perpendicular a y em que $0 < y < 10$

b) Os cortes de A com planos perpendiculares ao eixo Oy, $0 \leq y \leq 10\sqrt{2}$, estão representados nas figuras 2 e 3 (com o eixo Ox orientado verticalmente para cima e o eixo Oz horizontal).

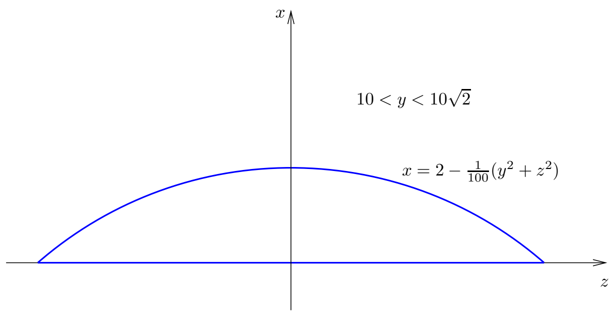

Figura 3: Corte perpendicular a y em que $10 < y < 10\sqrt{2}$

Da análise destas duas figuras concluímos que, na ordem de integração proposta, a massa de ar é dada por

$$
\begin{aligned}
M &= 4.8\int_0^{10} \left[\int_0^1 \int_0^{\sqrt{100(2-x)-y^2}} 1\ dzdx + \right.\\
&+ \left. \int_1^2 \int_0^{\sqrt{100-y^2}} 1\ dzdx + \int_2^{4-\frac{1}{50}y^2} \int_0^{\sqrt{50(4-x)-y^2}} 1\ dzdx\right] dy + \\
&+ 4.8\int_{10}^{10\sqrt{2}} \int_0^{2-\frac{1}{100}y^2} \int_0^{\sqrt{100(2-x)-y^2}} 1\ dzdxdy
\end{aligned}
$$

Exercício 3 *Jack Gaudêncio é sobrinho do senhor Gaudêncio do exercício 2, trabalha num Dunkin Donuts na Ferry Street, em Newark, e é um apaixonado por física. Um dia, enquanto estudava para a cadeira de Physics 331, Jack resolveu calcular o momento de inércia I_L de um dos seus donuts preferidos em relação a um eixo natural de simetria L. Após observação atenta à saída do forno, concluiu que o donut tem a forma do seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^3$*

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2}-3)^2 + z^2 \leq 1\},$$

sendo L o eixo Oz. Atendendo à composição peculiar do donut, que envolve vários tipos de recheio e cobertura, Jack determinou que a função densidade de massa de D é dada por

$$\sigma(x,y,z) = \sqrt{1-(\sqrt{x^2+y^2}-3)^2}$$

Determine o valor do momento de inércia I_L que Jack deveria ter obtido.

Resolução: Como Jack bem sabe, o momento de inércia I_L obtém-se calculando o integral triplo seguinte

$$I_L = \iiint_D (x^2+y^2)\sigma(x,y,z)dx\,dy\,dz.$$

O *donut* D é um sólido com simetria cilíndrica pelo que resolveu imediatamente usar *coordenadas cilíndricas*. Note-se que Jack sabe que D se obtém fazendo rodar em torno do eixo Oz o círculo de raio um e centro no ponto de coordenadas $(3,0,0)$, tal como se representa na figura 4.

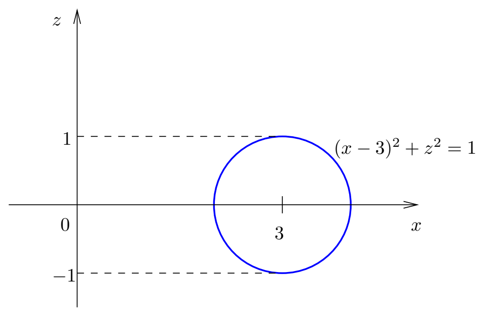

Figura 4: D obtém-se rodando o círculo em torno do eixo Oz

Depois de pensar durante algum tempo, Jack lembrou-se que o Jacobiano da transformação de coordenadas $(\rho,\theta,z) \mapsto (x,y,z)$ é ρ (distância aos eixo Oz) e, assim, obteve

$$I_L = \int_0^{2\pi}\left(\int_{-1}^{1}\left(\int_{3-\sqrt{1-z^2}}^{3+\sqrt{1-z^2}} \rho^2\sqrt{1-(\rho-3)^2}\,\rho\,d\rho\right)dz\right)d\theta.$$

Apesar de ser um cromo a Math 303 (*i.e.* AMIII), Jack não se aventurou a calcular este integral. Foi então que pensou, “Dude, this is like easy”, e resolveu inverter a ordem de integração em z e em ρ, obtendo

$$\begin{aligned}
I_L &= \int_0^{2\pi} \left(\int_2^4 \left(\int_{-\sqrt{1-(\rho-3)^2}}^{\sqrt{1-(\rho-3)^2}} \rho^2 \sqrt{1-(\rho-3)^2}\, \rho\, dz \right) d\rho \right) d\theta \\
&= 2\pi \int_2^4 2\rho^3 \left[1-(\rho-3)^2\right] d\rho \\
&= 4\pi \int_2^4 (6\rho^4 - \rho^5 - 8\rho^3) d\rho \\
&= 4\pi \left[\frac{6\rho^5}{5} - \frac{\rho^6}{6} - 2\rho^4 \right]_2^4 \\
&= \frac{768}{5}\pi.
\end{aligned}$$

Exercício 4 *A menina Lucialima Gaudêncio, filha do Sr. Gaudêncio agricultor e futura avó do Comodoro Gaudêncio IV, é muito delicada e sensível e adora passear-se no jardim do pai, de vestido rendado e laçarote no cabelo, cantarolando, pensando em problemas de AMIII e apanhando flores que guarda num cesto.*
O cesto da menina Lucialima ocupa um delicado volume em $\mathbb{R}^3$ *que em unidades apropriadas é descrito por*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 4, z \leq 0\}.$$

Após tê-los resolvido com alegria, a menina Lucialima sugeriu-nos os seguintes problemas para o exercício-teste:

a) Utilizando coordenadas cilíndricas calcule o volume do cesto.

b) Calcule de novo o volume de S *mas desta vez utilize primeiro uma mudança de coordenadas linear, combinando-a depois com coordenadas esféricas.*

c) Sabendo que a densidade de massa do cesto é dada por

$$\rho(x, y, z) = 1 + (x^2 + y^2 + 2z^2)^{3/2}$$

calcule o seu momento de inércia em relação ao eixo Oz*. (Este cálculo é relevante para estudar o movimento de rotação do cesto que a menina Lucialima gosta de fazer quando se sente bem e lhe apetece rodopiar pelo jardim.)*

Resolução:

a) O cesto tem simetria cilíndrica em torno do eixo Oz. Por esta razão, basta examinar a forma do conjunto S cortando-o por um plano vertical, por exemplo o plano $x = 0$, tal como se representa na figura 5.

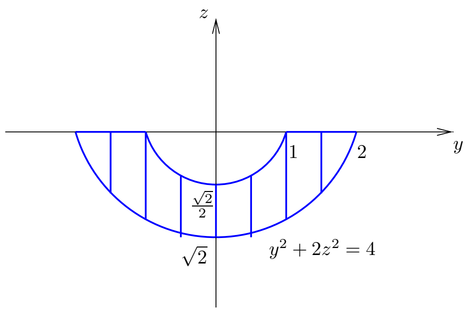

Figura 5: Corte em S segundo o plano $x = 0$

Nesse plano obtemos a região definida por $1 \leq y^2 + 2z^2 \leq 4$ com $z \leq 0$, ou seja, a região em $z \leq 0$ que se encontra entre as duas elipses de equações $y^2 + 2z^2 = 1$ e $y^2 + 2z^2 = 4$.

Observamos então que quando a coordenada ρ (que neste plano é dada por $\rho = |y|$) varia entre 0 e 1, temos

$$-\sqrt{\frac{4-\rho^2}{2}} \leq z \leq -\sqrt{\frac{1-\rho^2}{2}}$$

Por outro lado, para $1 \leq \rho \leq 2$, temos

$$-\sqrt{\frac{4-\rho^2}{2}} \leq z \leq 0$$

Quanto a θ temos $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Portanto, o volume de S é dado por

$$V(S) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{\frac{4-\rho^2}{2}}}^{-\sqrt{\frac{1-\rho^2}{2}}} \rho dz \right) d\rho + \int_1^2 \left(\int_{-\sqrt{\frac{4-\rho^2}{2}}}^{0} \rho dz \right) d\rho \right) d\theta.$$

Calculando o integral obtemos,

$$\begin{aligned} V(S) &= 2\pi \left(\int_0^1 (-\sqrt{\frac{1-\rho^2}{2}} + \sqrt{\frac{4-\rho^2}{2}})\rho d\rho + \int_1^2 \sqrt{\frac{4-\rho^2}{2}})\rho d\rho \right) \\ &= 2\pi \left(\int_0^{1/2} \sqrt{u} du - \int_0^2 \sqrt{u} du \right) \\ &= \frac{4\pi}{3} \left(\sqrt{8} - \frac{1}{\sqrt{8}} \right) \\ &= \frac{7\sqrt{2}\pi}{3} \end{aligned}$$

b) O cesto é limitado por porções de superfícies elipsoidais. Um elipsóide é simplesmente uma superfície esférica deformada por alguma alteração de escala nos eixos coordenados. Neste caso podemos definir

$$w = \sqrt{2}z$$

e as condições que definem S em termos de (x, y, w) passam a ser

$$1 \leq x^2 + y^2 + w^2 \leq 4; \quad w \leq 0$$

i.e. em termos de (x, y, w) temos uma região limitada pelos hemisférios sul de duas superfícies esféricas de raios 1 e 2 respectivamente.

O Jacobiano da transformação linear $(x, y, w) \mapsto (x, y, z)$ é dado pelo determinante da matriz diagonal com entradas $(1, 1, 1/\sqrt{2})$ que é igual a $1/\sqrt{2}$.

Seja $A = \{(x, y, w)\mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + w^2 \leq 4, w \leq 0\}$

Portanto, em coordenadas (x, y, w) e lembrando-nos que a condição $w \leq 0$, em coordenadas esféricas, significa que $\pi/2 \leq \phi \leq \pi$, temos o volume de S dado por

$$\begin{aligned} V(S) = \int_S 1 dxdydz &= \int_A \frac{1}{\sqrt{2}} dxdydw \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{\pi/2}^{\pi} \left(\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2}} r^2 \mathrm{sen}\phi \, dr \right) d\phi \right) d\theta \\ &= \frac{2\pi(8-1)}{3\sqrt{2}} \\ &= \frac{7\sqrt{2}\pi}{3} \end{aligned}$$

que é igual ao resultado anterior.

c) Em termos das coordenadas da alínea anterior temos $\rho = (1 + r^3)$, uma vez que

$$r^2 = x^2 + y^2 + w^2 = x^2 + y^2 + 2z^2$$

É portanto conveniente utilizar as expressões da alínea b). O quadrado da distância ao eixo Oz é dada por

$$d(x, y, z)^2 = x^2 + y^2 = r^2 \mathrm{sen}^2 \phi$$

Assim temos

$$\begin{aligned}
I_z &= \int_0^{2\pi}\left(\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2}}(1+r^3)r^2\mathrm{sen}^2\phi\; r^2\mathrm{sen}\phi\; dr\right)d\phi\right)d\theta \\
&= 2\pi\left(\int_1^2 (1+r^3)r^4 dr\right)\left(\int_{\pi/2}^{\pi}\mathrm{sen}^3\phi\; d\phi\right) \\
&= \frac{4\pi}{3}\left(\frac{31}{5}+\frac{255}{8}\right)
\end{aligned}$$

Exercício 5 *A menina Lucialima tem um esquilo de que gosta muito e que trata ternurentamente por "tiquinho Gaudêncio". Uma das brincadeiras favoritas deste nosso par de heróis, sobretudo em dias de chuva, é a de fazer uma corrida em que a menina Lucialima vai pela escada abaixo enquanto o "tiquinho" escorrega pelo corrimão abanando a cauda.*
O corrimão (fino) da escada tem a forma da curva

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \ z = \frac{\sqrt{5}}{2} y, \ 0 \leq y \leq 2, x \geq 0 \right\}$$

a) Determine a massa do corrimão sabendo que a densidade de massa por unidade de comprimento é $\sigma(x, y, z) = x + y$.

b) Determine o centro de massa $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ do corrimão.

c) O Sr. Gaudêncio adora engenhocas e montou as escadas numa plataforma giratória que roda em torno do eixo $L = Oz$. É por isso importante conhecer o momento de inércia, I_L, do corrimão em relação a esse eixo. Determine I_L.

Resolução:

Na figura 6 encontra-se uma representação do corrimão da menina Lucialima.

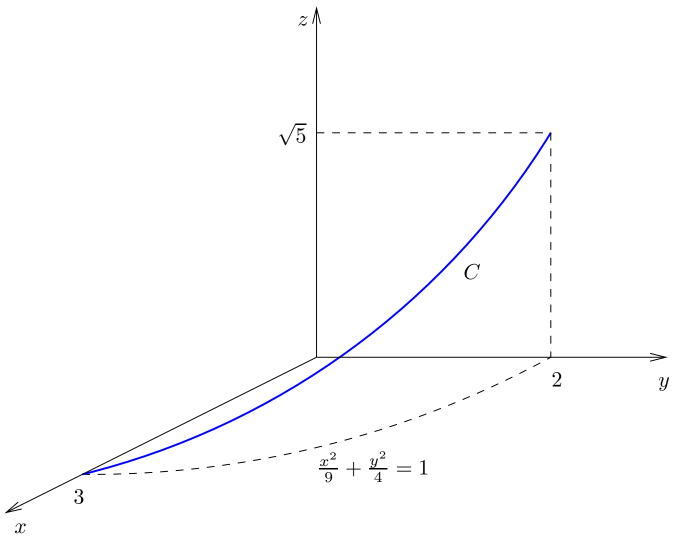

Figura 6: O corrimão da menina Lucialima

a) Uma parametrização do corrimão é dada por,

$$g(\theta) \ : \ \begin{cases} x = & 3 \ \cos(\theta) \\ y = & 2 \ \operatorname{sen}(\theta) \\ z = & \sqrt{5} \ \operatorname{sen}(\theta) \end{cases} \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

pelo que

$$g'(\theta) = \left(-3 \ \operatorname{sen}(\theta), 2 \ \cos(\theta), \sqrt{5} \ \cos(\theta) \right)$$

e

$$||g'(\theta)|| = \sqrt{9\,\mathrm{sen}^2(\theta) + 4\cos^2(\theta) + 5\cos^2(\theta)} = 3 \; .$$

A massa é então,

$$\begin{aligned} M = \int_C \sigma &= \int_0^{\pi/2} [3\cos(\theta) + 2\,\mathrm{sen}(\theta)]\, 3d\theta = \\ &= (9\,\mathrm{sen}(\theta) - 6\cos(\theta))_0^{\pi/2} = 15 \end{aligned}$$

b) O centro de massa tem coordenadas dadas por

$$\begin{aligned} \overline{x} = \frac{1}{M}\int_C x\sigma &= \frac{1}{15}\int_0^{\pi/2} 3\cos(\theta)\,[3\cos(\theta) + 2\,\mathrm{sen}(\theta)]\, 3d\theta = \\ &= \frac{9}{5}\int_0^{\pi/2} \cos^2(\theta) d\theta + \frac{6}{5}\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta) d\theta = \frac{9\pi}{20} + \frac{3}{5} \cong 2.01 \\ \overline{y} = \frac{1}{M}\int_C y\sigma &= \frac{1}{15}\int_0^{\pi/2} 2\,\mathrm{sen}(\theta)\,[3\cos(\theta) + 2\,\mathrm{sen}(\theta)]\, 3d\theta = \frac{3}{5} + \frac{\pi}{5} \cong 1.23, \\ \overline{z} = \frac{1}{M}\int_C z\sigma &= \frac{\sqrt{5}}{2}\overline{y} = \sqrt{5}\frac{\pi + 3}{10} \cong 1.37 \end{aligned}$$

c) Para o momento de inércia em relação ao eixo Oz temos

$$\begin{aligned} I_L = \int_C d^2\sigma &= \int_0^{\pi/2} \left[9\cos^2(\theta) + 4\,\mathrm{sen}^2(\theta)\right] [3\cos(\theta) + 2\,\mathrm{sen}(\theta)]\, 3d\theta \\ &= 3\int_0^{\pi/2} \left[5\cos^2(\theta) + 4\right] 2\,\mathrm{sen}(\theta) d\theta + 3\int_0^{\pi/2} \left[9 - 5\,\mathrm{sen}^2(\theta)\right] 3\cos(\theta) d\theta = \\ &= 6\int_0^1 (5u^2 + 4) du + 9\int_0^1 (9 - 5v^2) dv = 100. \end{aligned}$$

Exercício 6 *Há muitos muitos anos, numa galáxia muito muito distante, Luke Gaudêncio estudava as artes Jedi com o Mestre Yoda. Depois de vários testes de destreza física e mental (que incluiram o cálculo de integrais iterados em 11 variáveis), o Mestre Yoda, dirigindo-se a Luke, perguntou*
— Luke, a **Força** *sentes ?*
Luke concentrou-se e escreveu a seguinte expressão no seu bloco de notas Jedi

$$F(x,y,z) = e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z).$$

Dirigindo-se de novo a Luke, Mestre Yoda perguntou
— Conservativa a **Força** *é ?*
Quando Luke se preparava para responder, Yoda interrompeu-o
— Próximo o Darth Gaudêncio está. A perturbação na **Força** *sentes ?*
Luke concentrou-se e desta vez escreveu

$$F_D(x,y,z) = e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z) + \frac{1}{(x-10^7)^2+y^2}(-y, x-10^7, 0)$$

Quando olhou de novo para o Mestre, este perguntou-lhe
— E agora, Luke, conservativa a **Força** *é ?*

a) *Responda à segunda pergunta de Yoda. Ou seja, determine se a* **Força** *na ausência de Darth Gaudêncio (o campo $F(x,y,z)$) é um gradiente. Se for, calcule um potencial.*

b) *Responda à quarta pergunta de Yoda. Ou seja, determine se a* **Força** *na presença de Darth Gaudêncio (o campo $F_D(x,y,z)$) é um gradiente. Se for, calcule um potencial.*

Resolução:

a) Seja $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Notando que $\nabla(r) = \dfrac{(x,y,z)}{r}$, vem

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-r}x}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{xy(r+1)e^{-r}}{r^3} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-r}x}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{xz(r+1)e^{-r}}{r^3} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-r}y}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{yz(r+1)e^{-r}}{r^3} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \end{cases}$$

Portanto F é um campo fechado. Como F é um campo de classe C^1 e o seu domínio, $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, é simplesmente conexo, concluímos que F é um gradiente.

Da igualdade

$$F(x,y,z) = e^{-r}\nabla(r),$$

segue imediatamente que

$$F = \nabla(-e^{-r})$$

e, portanto,

$$\phi = -e^{-r}$$

é um potencial para F.

b) Seja

$$G(x,y,z) = \frac{(-y, x-10^7, 0)}{(x-10^7)^2 + y^2}$$

Uma vez que $F_D = F + G$ e, de acordo com a resposta à alínea a) o campo F é um gradiente, concluímos que F_D é um gradiente se e só se G o for. É fácil de verificar que G é um campo fechado. No entanto não podemos daí concluir que G é um gradiente pois o seu domínio não é simplesmente conexo. De facto, o domínio de G é

$$D(G) = \mathbb{R}^3 \setminus L,$$

onde L é a linha recta definida por

$$L = \{(10^7, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$$

Portanto os caminhos que *dão a volta* a L não são homotópicos a um caminho constante.

Consideremos então o caminho $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$\alpha(t) = (\cos(t) + 10^7, \operatorname{sen}(t), 0)$$

e calculemos o trabalho realizado pelo campo G ao longo deste caminho:

$$\int G \cdot d\alpha = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 0) \cdot (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 0) dt = 2\pi \neq 0,$$

Portanto, o campo G não é um gradiente e, consequentemente, F_D também não será um gradiente.

Exercício 7 *Marcelino Gaudêncio não teve uma vida nada fácil. Este bisavô do Sr. Gaudêncio, que deixou, como vamos sabendo, uma descendência de familares ilustres, pagou caro os seus erros de juventude vivida no fio da navalha durante os inebriantes anos finais do século XIX. Para escapar à polícia após uns assaltos mal-sucedidos a bancos, Marcelino Gaudêncio refugiou-se nos confins da América do Sul onde deu asas à sua fantasia secreta de infância: ter um circo de formigas!*
O espectáculo do circo consistia em pôr as formigas, sujeitas a uma dieta cientificamente estudada, a dançar o Can-Can ao longo de um arame, no sentido anti-horário, que tinha a forma seguinte (a unidade é o metro):

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 = 4, \text{ para } x < 0;\ (x-1)^2 + y^2 = 4, \text{ para } x > 0\}.$$

A força de atrito ao longo do arame era dada pela expressão (a unidade é caloria/metro):

$$f(x,y) = \left(\frac{-y}{(x-2)^2+y^2} + xe^{-(x^2+y^2)} + 3y\,,\ \frac{x-2}{(x-2)^2+y^2} + ye^{-(x^2+y^2)} - 4x \right).$$

Calcule a quantidade de calorias que as formigas de Marcelino Gaudêncio gastam a vencer o atrito quando dançam à volta ao arame.

PS. Ficarão contentes de saber que esta história acabou bem. Devido ao sucesso popular estrondoso do seu circo de formigas, Marcelino Gaudêncio liderou uma revolta e nomeou-se a si próprio ditador vitalício daquele pequeno país. Veio depois a casar com a bisavó do nosso Sr. Gaudêncio, a Exma. Sra. Dona Consuela Gaudêncio.

Resolução: A quantidade de calorias gastas pelas formigas de Marcelino Gaudêncio ao longo do caminho C será dada pelo trabalho realizado pela força de atrito.

Para facilitar a análise, vamos decompor a força f em três partes $f = g + h + l$ em que

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \left(\frac{-y}{(x-2)^2+y^2}, \frac{x-2}{(x-2)^2+y^2} \right) \\ h(x,y) &= \left(xe^{-(x^2+y^2)}, ye^{-(x^2+y^2)} \right) \\ l(x,y) &= (3y, -4x) \end{aligned}$$

Assim, o trabalho realizado por F será dado por

$$\oint_C f = \oint_C g + \oint_C h + \oint_C l$$

O campo g é fechado (como é imediato verificar) e está definido em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Seria muito complicado calcular directamente, pela definição, o trabalho de g ao longo de C. Vamos, em vez disso, considerar uma circunferência γ de raio $1/2$ e centrada no ponto $(2,0)$, orientada no sentido anti-horário tal como se ilustra na figura 7.

Pelo teorema de Green aplicado à região limitada pelas linhas C e γ, e tendo em conta que g é um campo fechado, temos

$$\oint_\gamma g = \oint_C g.$$

Usando a parametrização

$$\gamma(\theta) = \left(2 + \frac{1}{2}\cos(\theta), \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta) \right)$$

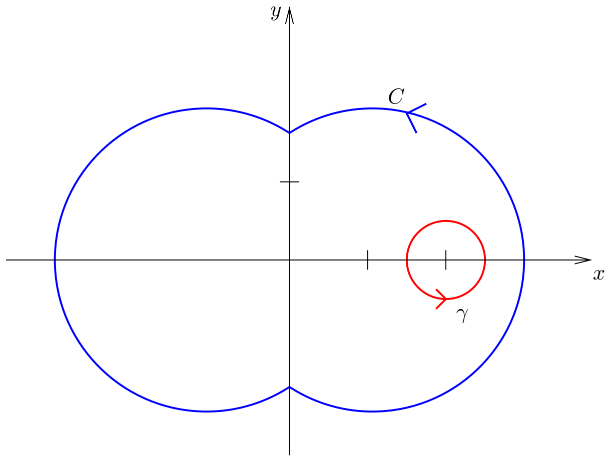

Figura 7: O circo das formigas de Marcelino Gaudêncio

o trabalho realizado por g ao longo de γ será dado por

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma g &= \int_0^{2\pi} g(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (-2\,\mathrm{sen}(\theta)), 2\cos(\theta)) \cdot (-\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(\theta)), \frac{1}{2}\cos(\theta)) d\theta \\
&= 2\pi = \oint_C g
\end{aligned}$$

Quanto ao campo h podemos observar que é um campo radial, isto é, tem a forma

$$h(x, y) = \alpha(r)(x, y)$$

em que $r^2 = x^2 + y^2$.

Facilmente observamos que h é fechado e que está definido em todo o plano, logo é gradiente. Um potencial para h é dado por

$$\phi(x, y) = (-1/2) \exp(-x^2 - y^2)$$

e portanto

$$\oint_C h = 0$$

Na verdade, esta força h, não sendo conservativa, nunca poderia ser uma força de atrito. (Marcelino Gaudêncio, devido à sua juventude atribulada não tinha muito tempo para estudar e não era um cromo em AMIII).

Quanto ao campo l, o mais simples é calcular $\oint_C l$ utilizando o teorema de Green. Seja D a região do plano limitada por C. Então, como

$$\partial_1 l_2 - \partial_2 l_1 = -4 - 3 = -7$$

pelo teorema de Green obtemos

$$
\begin{aligned}
\oint_C l &= \int\int_D (-7)dxdy \\
&= -7\,(\text{area de } D) \\
&= -28\int_0^{\pi/2}(\int_0^{\cos(\theta)+\sqrt{3+\cos(\theta)^2}} rdr)d\theta \\
&= -28\int_0^{\pi/2}(\cos(\theta)^2 + 3/2 + \cos(\theta)\sqrt{3+\cos(\theta)^2})d\theta \\
&= -28(\pi/4 + 3\pi/4 + \pi/6 + 1/2\sqrt{3/2})) \\
&= -28(7/6\pi + 1/2\sqrt{3/2})
\end{aligned}
$$

Assim, o trabalho realizado pela força f ao longo de C é de $-28(7/6\pi + 1/2\sqrt{3/2})$ calorias. As formigas gastam portanto $28(7/6\pi + 1/2\sqrt{3/2})$ calorias por volta. *Elas estavam mesmo muito bem treinadas fisicamente por Marcelino Gaudêncio.*

Nota: A primitiva de $\cos(\theta)\sqrt{3+\cos(\theta)^2}$ pode ser obtida com a substituição $\alpha = \text{arcsen}(\frac{1}{2\text{sen}\,\theta})$.

Exercício 8 *Ricardo Grandêncio é um prestigiado vereador da cultura e desporto da Câmara de Ribanceira de Baixo. Para manter o cargo necessita de se assegurar que no ano de 2025, em que tinha 24 anos de idade, a derivada do orçamento da cultura v em ordem ao tempo t_1 era negativa, mantendo constante a variável t_2.*
As quatro variáveis, (t_1, t_2, u, v), satisfazem (para certa escolha das origens) a misteriosa relação determinada pelo brilhante matemático e economista André Gil Gaudêncio (por ele designada relação elíptica, vá-se lá saber porquê)

$$\begin{cases} t_1^2 - t_2^2 - u^3 + 3uv^2 - 2u + 3 = 0 \\ 2t_1t_2 - 3u^2v + v^3 - 2v = 0 \end{cases} \tag{2}$$

e tal que em 2025 se verifica

$$(t_1, t_2, u, v) = (1, 2, 1, 1)$$

Determine o valor de $\frac{\partial v}{\partial t_1}$ que Ricardo G encontrou.
Sugestão: *Aplique o teorema da função implícita para mostrar que, numa vizinhança do ponto $(1, 2, 1, 1)$, a relação (2) define (u, v) como função de (t_1, t_2) e calcule a derivada parcial pedida usando o mesmo teorema.*

Resolução: De acordo com o teorema da função implícita, para que a relação (2) defina, (u, v) como função de (t_1, t_2), numa vizinhança do ponto $p_0 = (t_{1_0}, t_{2_0}, u_0, v_0)$ que satisfaz a relação (2), é suficiente que

$$J_{(u,v)}F(t_{1_0}, t_{2_0}, u_0, v_0) = \det\left(\frac{\partial F}{\partial(u, v)}\right)(t_{1_0}, t_{2_0}, u_0, v_0) \neq 0 \ ,$$

onde $F = (F_1, F_2) \ : \ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ é a função de classe C^∞ definida por (2), i.e.

$$\begin{aligned} F_1(t_1, t_2, u, v) &= t_1^2 - t_2^2 - u^3 + 3uv^2 - 2u + 3 \\ F_2(t_1, t_2, u, v) &= 2t_1t_2 - 3u^2v + v^3 - 2v \end{aligned}$$

O ponto $p_0 = (1, 2, 1, 1)$ satisfaz a relação (2). De facto temos,

$$\begin{cases} 1 - 4 - 1 + 3 - 2 + 3 = 0 \\ 4 - 3 + 1 - 2 = 0 \ . \end{cases}$$

A matriz 2×4 que representa a derivada de F, DF, no ponto em questão é dada por,

$$\begin{aligned} DF(1, 2, 1, 1) &= \begin{pmatrix} 2t_1 & -2t_2 & -3u^2 + 3v^2 - 2 & 6uv \\ 2t_2 & 2t_1 & -6uv & -3u^2 + 3v^2 - 2 \end{pmatrix}\Big|_{(1,2,1,1)} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & -6 & -2 \end{pmatrix} \ . \end{aligned} \tag{3}$$

Temos então

$$J_{(u,v)}F(1, 2, 1, 1) = \det\left(\frac{\partial F}{\partial(u, v)}\right)(1, 2, 1, 1) = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = 40 \neq 0 \tag{4}$$

pelo que a relação (2) define, numa vizinhança do ponto $(1, 2, 1, 1)$, (u, v) como função de classe C^∞ de (t_1, t_2).

Para calcular derivadas parciais em ordem a t_1 das funções definidas implicitamente por (2) derivemos estas relações em ordem a t_1

$$\begin{aligned}
2t_1 - 3u^2\frac{\partial u}{\partial t_1} + 3\frac{\partial u}{\partial t_1}v^2 + 6uv\frac{\partial v}{\partial t_1} - 2\frac{\partial u}{\partial t_1} &= 0 \\
2t_2 - 6u\frac{\partial u}{\partial t_1}v - 3u^2\frac{\partial v}{\partial t_1} + 3v^2\frac{\partial v}{\partial t_1} - 2\frac{\partial v}{\partial t_1} &= 0\ ,
\end{aligned}$$

o que, no ponto $(1,2,1,1)$, dá o sistema

$$\begin{aligned}
-2\frac{\partial u}{\partial t_1}(1,2) + 6\frac{\partial v}{\partial t_1}(1,2) &= -2 \\
-6\frac{\partial u}{\partial t_1}(1,2) - 2\frac{\partial v}{\partial t_1}(1,2) &= -4
\end{aligned} \tag{5}$$

Resolvendo este sistema obtemos

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t_1}(1,2) \\ \frac{\partial v}{\partial t_1}(1,2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{40}\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

O valor que Ricardo Gaudêncio encontrou foi assim, para sua satisfação e alívio, $\frac{\partial v}{\partial t_1}(1,2) = -\frac{1}{10}$.

Exercício 9 *Feriado Gaudêncio é irmão de Marcelino Gaudêncio, e também não tem tido uma vida nada fácil. Em boa verdade, Feriado é um encenador falhado do teatro de revista. Com o intuito de ajudar o irmão a ultrapassar uma difícil crise de meia idade aos 30 anos – após mais uma produção fracassada no parque Mayer – Marcelino convidou-o para encenar um espectáculo inovador com o seu famoso circo de formigas amestradas. O espectáculo consistia em pôr as formigas esquiando a uma velocidade alucinante ao longo de uma rampa com a forma do conjunto*

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x\tan(z),\ -\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Colocado perante esta proposta, Feriado teve uma daquelas reacções desencorajadoras que o caracterizam, perguntando:
– Mano, tens a certeza que isto é um número de variedades ?

a) Ajude Marcelino a sossegar o irmão, mostrando que M é uma variedade de dimensão 2.

b) Determine os pontos p em que M é vertical. Ou seja, determine os pontos p tais que T_pM contém o vector $(0, 0, 1)$.

A resposta é relevante para a escolha da iluminação do espectáculo.

Resolução:

a) Seja $f : \mathbb{R} \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ a função de classe C^1, definida por $f(x, z) = x\tan(z)$. Notando que M é o gráfico de f:

$$M = \left\{(x, f(x, z), z) :\ (x, z) \in \mathbb{R} \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right\},$$

conclui-se que M é uma variedade de dimensão 2.

Em alternativa, M é uma variedade de dimensão 2 porque é o conjunto de nível zero da função de classe C^1, $F(x, y, z) = y - x\tan z$:

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ : F(x, y, z) = 0\right\},$$

e a matriz

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} -\tan z & 1 & -x\sec^2 z \end{bmatrix}$$

tem característica máxima (igual a 1) em todos os pontos de M.

b) Pretende-se determinar o conjunto dos pontos $p \in M$ tais que $(0, 0, 1) \in T_pM$. Ora, de acordo com a resposta à alínea anterior, o espaço ortogonal a M em $p = (x, y, z)$ é gerado pelo vector $(-\tan z, 1, -x\sec^2 z)$. Assim, temos

$$(0, 0, 1) \in T_pM \Leftrightarrow (0, 0, 1) \cdot (-\tan z, 1, -x\sec^2 z) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Portanto o conjunto dos pontos onde M é vertical é dado por

$$\{(x, y, z) \in M : x = 0\} = \left\{(0, 0, z) : -\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Exercício 10 *Carlos Quente Gaudêncio tinha problemas. Certa manhã acordou com a ideia fixa de se tornar super-herói. Sentou-se à beira da cama esfregando os olhos compulsivamente, levantou-se e vestiu um pijama de tecido turco azul bébé; caída sobre as costas colocou uma toalha de mesa vermelha, atando-a com um nó ao pescoço. Em poucos segundos encontrou e calçou as galochas de borracha encarnada que tinha comprado para o último inverno chuvoso. Respirou fundo. Dirigiu-se à janela do quarto, que ficava no segundo andar da "Vivenda Gaudêncio", equilibrou-se instavelmente no parapeito, gritou com toda a força dos seus pulmões:*
- É um pássaro! É um avião! Não!
Atirou-se e continuou gritando com toda a voz:
- É o Super-Gaudênciooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo!
Poucos instantes depois encontrava-se estatelado no chão, aturdido e gemendo:
- Ai! Ai! Aiiiiiiiiii!
De imediato a menina Lucialima ouvindo o enorme estrondo correu em auxílio do irmão. O Sr. Gaudêncio que se encontrava fechado no seu escritório a recordar a sua fase Beatle e a ouvir o "Clube de Corações Solitários do Sargento Pimenta" saltou da poltrona e foi também acudir.
- Quentinho! Quentinho, estás bem ? - perguntaram em coro o Sr. Gaudêncio e a menina Lucialima.
- Simmmmmmmmm - respondeu Carlos Quente.
- Ai é ? Então diz-nos lá em que ponto da superfície da tua - cabeça é que te dói mais para lá colocarmos um cubo de gelo ? - perguntaram pai e filha.
Poucos momentos antes de desmaiar de vez, Carlos Quente levantou ligeiramente a cabeça e sussurrou a resposta ao ouvido do pai.

Sabendo que a superfície da cabeça de Carlos Quente é elipsoidal da forma

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$$

e que a função dor de cabeça é claramente dada pelo campo escalar

$$f(x, y, z) = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 2z,$$

descubra a resposta sussurrada por Carlos Quente ao ouvido do pai.

Resolução: Temos o problema de encontrar o ponto onde a função $f(x, y, z) = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 2z$, restrita à superfície elipsoidal S e definida pela equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$, atinge o valor máximo.

Como S é compacta e f é contínua então de certeza que existirá um valor máximo (e também um valor mínimo) para f em S.

Seja

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 - 1$$

Então F é de classe C^1 e a sua derivada

$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, 2z\right)$$

só se anula na origem $(0, 0, 0)$ que não pertence a S. Logo, S é uma variedade-2.

Podemos portanto aplicar o método dos multiplicadores de Lagrange para resolver o problema. Se (x, y, z) é um ponto de estacionaridade de f restrita a S então existe um real λ tal que o sistema de equações seguinte tem solução:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla F(x,y,z) \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = \lambda \frac{x}{2} \\ \frac{1}{2} = \lambda \frac{y}{2} \\ -2 = 2z\lambda \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1 \end{cases}$$

As 3 primeiras equaçẽs implicam que $\lambda \neq 0$ e $x = y = -z = 1/\lambda$. Substituindo na última equação obtemos $\lambda^2 = 3/2$, ou seja, temos duas soluções do sistema, respectivamente p_1 e p_2:

$$\begin{cases} \lambda = \sqrt{3/2} \\ p_1 = (x,y,z) = (\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}, -\sqrt{2/3}) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \lambda = -\sqrt{3/2} \\ p_2 = (x,y,z) = (-\sqrt{2/3}, -\sqrt{2/3}, +\sqrt{2/3}) \end{cases}$$

Os valores de f nestes pontos são respectivamente $f(p_1) = 3\sqrt{2/3}$ e $f(p_2) = -3\sqrt{2/3}$. Logo, p_1 é o ponto de máximo e p_2 o ponto de mínimo. Concluímos que a dor de cabeça de Carlos Quente era maior algures na base do seu crânio.

Exercício 11 *Como terá reparado nem só os Gaudêncios têm tido uma vida difícil. As formigas não têm, com o decorrer da História, vivido propriamente num mar de rosas. Imagine que as descendentes das que sobreviveram ao circo de Marcelino G e à rampa infinita de Feriado G tiveram de se sujeitar às idiossincrasias do conhecido Ás do râguebi, Mário Gaudêncio. E que idiossincrasias! Não se sabe bem porquê, mas MG convenceu-se de que uma bola de râguebi, cuja massa se concentra essencialmente na superfície, melhora se preenchida com esponja e se, antes de cada jogo, nessa esponja for colocada uma formiga, a qual se pode mover livremente pela esponja ou fixar-se em qualquer dos seus pontos. Felizmente que as formigas, animais de inteligência única, descobriram que há, no interior da bola, um ponto que se move de forma particularmente simples durante o jogo, provocando todos os restantes pontos uma grande dor de cabeça (e de antenas). Pelas leis da física de Isacus Netonus Formigus, estabelecidas já no ano de 3 012 224 AC (!), esse ponto é o centro de massa!*
Sabendo que podemos desprezar a massa da esponja e da formiga, que a superfície da bola é dada por

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1 \right\}$$

e que a densidade (superficial) de massa em S é (outra extravagância de MG)

$$\sigma(x, y, z) = \frac{(z-1)^2 + 1}{\sqrt{9 - \frac{8}{9} z^2}} \ ,$$

determine a coordenada $\overline{z}$ *da formiga, perdão,* **do centro de massa da bola** S.
(Pela simetria do problema é claro que $\overline{x} = \overline{y} = 0$)

Resolução: Temos primeiro de determinar a massa da bola que é dada pelo integral da densidade de massa σ na variedade-2 S, ou seja,

$$M = \int_S \sigma \ .$$

A simetria do problema torna natural a utilização da seguinte parametrização

$$g \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) \\ y & = & \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) \ ; \qquad 0 < \theta < 2\pi \ , \ 0 < \varphi < \pi \\ z & = & 3 \cos(\varphi) \end{array} \right.$$

da vizinhança de coordenadas

$$S \cap U = S \setminus L$$

onde L é o subconjunto de S constituído pelos pontos com $y = 0$ e $x \geq 0$ tal como se ilustra na figura 8.

Note-se que sendo L uma linha não contribui para a posição do centro de massa de S.

A derivada de g é dada pela matriz

$$Dg(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi) & \cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi) & \operatorname{sen}(\theta)\cos(\varphi) \\ 0 & -3\operatorname{sen}(\varphi) \end{pmatrix}$$

e portanto

$$Dg^t Dg = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2(\varphi) & 0 \\ 0 & \cos^2(\varphi) + 9\operatorname{sen}^2(\varphi) \end{pmatrix}$$

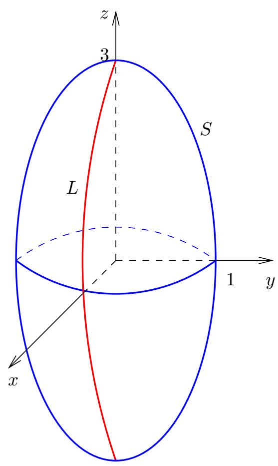

Figura 8: A bola de râguebi S

e

$$\sqrt{\det(Dg^t Dg)} = \operatorname{sen}(\varphi)\sqrt{9 - 8\cos^2(\varphi)}.$$

Então

$$\begin{aligned}
M = \int_S \sigma &= \int_{S\setminus L} \sigma = \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sigma(x(\theta,\varphi), y(\theta,\varphi), z(\theta,\varphi)) \sqrt{\det(Dg^t Dg)}\ d\theta d\varphi = \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{[3\cos(\varphi) - 1]^2 + 1}{\sqrt{9 - 8\cos^2(\varphi)}}\ \operatorname{sen}(\varphi)\sqrt{9 - 8\cos^2(\varphi)}\ d\theta d\varphi = \\
&= 2\pi \int_0^\pi \left[(3\cos(\varphi) - 1)^2 + 1\right] \operatorname{sen}(\varphi)\ d\varphi\ .
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de coordenadas $u = -\cos(\varphi)$ temos

$$\begin{aligned}
M &= 2\pi \int_{-1}^{1} \left(9u^2 + 6u + 2\right) du = \\
&= 2\pi \left(3u^3 + 3u^2 + 2u\right) |_{-1}^{1} = 20\pi\ .
\end{aligned}$$

Para a coordenada $\overline{z}$ do centro de massa da bola temos

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= \frac{1}{M}\int_S z\sigma = \int_{S\setminus L} z\sigma = \\
&= \frac{1}{20\pi}\int_0^\pi \int_0^{2\pi} 3\cos(\varphi)\left[(3\cos(\varphi) - 1)^2 + 1\right] \operatorname{sen}(\varphi)\ d\theta d\varphi = \\
&= -\frac{3}{10}\int_{-1}^{1} \left(9u^3 + 6u^2 + 2u\right) du = \\
&= -\frac{3}{10}\,4 = -\frac{6}{5}.
\end{aligned}$$

Exercício 12 *No ano 2150 o trânsito em Lisboa tornou-se caótico ! Na verdade, é preciso recuar ao longínquo ano de 2113 — ano em que o automóvel foi finalmente substituído pelo disco voador — para encontrar congestionamentos desta magnitude.*
Para obviar a esta grave situação, o presidente da edilidade alfacinha, Celestino Gaudêncio, decidiu levar a cabo uma alteração dos sentidos do trânsito em algumas das principais artérias da cidade de Ulisses. No ponto de confluência de todas as vias afectadas está o conhecido "Hiperbolóide de Pombal", onde os técnicos camarários esperavam que viessem a sentir-se melhorias imediatas na circulação, enquanto os adversários de Celestino previam que viesse a dar-se um estrangulamento do tráfego que provocasse o esmagamento político do conhecido autarca.
À hora de ponta do dia de entrada em funcionamento do novo esquema de trânsito, Celestino decidiu enviar para o "Hiperbolóide de Pombal" o mais qualificado agente da divisão de trânsito da polícia, Firmino Gaudêncio (seu primo direito), a fim de aferir o sucesso do mesmo. O Agente Gaudêncio — como Firmino é conhecido nos meios policiais — destacou-se na Academia de Polícia por ter tido 20 valores no exame de AMIII, que desde há muitos anos é obrigatório para aceder à divisão de trânsito. Trinta segundos depois de chegar ao local, Firmino já tinha a resposta para as interrogações do seu primo.
Sabendo que o "Hiperbolóide de Pombal" — esse ex-líbris da cidade de Lisboa — tem a forma do conjunto

$$\mathrm{HP} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1+z^2,\ -1<z<1\right\},$$

que as densidades de fluxo do trânsito, antes e depois da entrada em vigor das medidas de Celestino, são dadas por

$$f_{ac}(x,y,z) = 10^5(x,-y,-z)$$

e

$$f_{dc}(x,y,z) = f_{ac}(x,y,z) + (1,-1,2x-2y),$$

respectivamente, determine os valores obtidos pelo Agente Gaudêncio para o número de discos voadores que saem do "Hiperbolóide de Pombal" por unidade de tempo (i.e. calcule o fluxo do campo):

a) antes das medidas de Celestino, usando o teorema da divergência;

b) depois das medidas de Celestino, usando o resultado da alínea anterior e o teorema de Stokes.

Resolução:

a) Consideremos as superfícies planas

$$P_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 2,\ z=1\right\}$$

$$P_0 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 2,\ z=-1\right\},$$

e seja V o sólido limitado por HP, P_1 e P_0:

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 1+z^2,\ -1<z<1\right\}.$$

tal como se ilustra na figura 9.

Aplicando o teorema da divergência, temos

$$\iiint_V \nabla \cdot f_{ac} = \iint_{\mathrm{HP}} f_{ac}\cdot n + \iint_{P_1} f_{ac}\cdot n + \iint_{P_0} f_{ac}\cdot n,$$

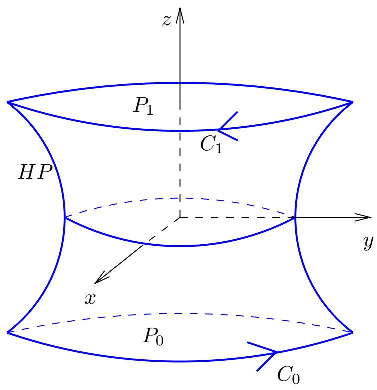

Figura 9: O "Hiperbolóide de Pombal"

onde n é a normal unitária exterior a V. Atendendo a que $n = (0, 0, 1)$ em P_1, $n = (0, 0, -1)$ em P_0 e que P_0 e P_1 são círculos de raio $\sqrt{2}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathrm{HP}} f_{ac} \cdot n &= \iiint_V \nabla \cdot f_{ac} - \iint_{P_1} f_{ac} \cdot n - \iint_{P_0} f_{ac} \cdot n \\
&= \iiint_V (-10^5) - \iint_{P_1} (-10^5) - \iint_{P_0} (-10^5) \\
&= -10^5 \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\sqrt{1+z^2}} \left(\int_0^{2\pi} \rho d\theta \right) d\rho \right) dz + 10^5 vol_2(P_1) + 10^5 vol_2(P_0) \\
&= -10^5 \pi \int_{-1}^{1} (1 + z^2) dz + 4\pi 10^5 \\
&= \frac{4}{3} \pi 10^5.
\end{aligned}$$

b) Seja $F(x, y, z) = (1, -1, 2x - 2y)$. Da igualdade $f_{dc}(x, y, z) = f_{ac}(x, y, z) + F(x, y, z)$ e do resultado da alínea anterior, vem

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathrm{HP}} f_{dc} \cdot n &= \iint_{\mathrm{HP}} f_{ac} \cdot n + \iint_{\mathrm{HP}} F \cdot n \\
&= \frac{4}{3} \pi 10^5 + \iint_{\mathrm{HP}} F \cdot n
\end{aligned}$$

Pretendemos agora aplicar o teorema de Stokes para calcular o fluxo do campo vectorial F através de HP. Note-se que $\nabla \cdot F = 0$. Como F está definido em $\mathbb{R}^3$, que é um conjunto em estrela, concluimos que F é um campo rotacional. Se A é um potencial vector para F, i.e., se $F = \nabla \times A$, então devemos ter

$$\begin{cases}
\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 1 \\
\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = -1 \\
\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = 2x - 2y
\end{cases}$$

Como é sabido, o facto de o potencial vector estar definido a menos de um gradiente permite-nos sempre supor que uma das componentes deste se anula. Escolhemos por exemplo $A_1 = 0$.

Então obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} = 2x - 2y \\ \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_3 = x + f(x,y) \\ A_1 = x^2 - 2xy + g(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \end{cases}$$

Portanto podemos por exemplo escolher $g = 0$ e $f = y$. Um potencial vector para F é então

$$A = (0, x^2 - 2xy, x + y).$$

Aplicando o teorema de Stokes, vem

$$\iint_{\mathrm{HP}} F \cdot n = \iint_{\mathrm{HP}} \nabla \times A \cdot n = \int_{\partial\,\mathrm{HP}} A \cdot d\alpha,$$

onde α é um caminho que percorre $\partial\,\mathrm{HP}$ no sentido compatível com a normal exterior n. Ora,

$$\begin{aligned} \partial\,\mathrm{HP} &= C_1 \cup C_0 \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2,\ z = 1\right\} \cup \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2,\ z = -1\right\}, \end{aligned}$$

pelo que α percorre C_1 no sentido horário e C_0 no sentido anti-horário, quando visto do ponto $(0,0,2)$ tal como se mostra na figura 9.

Assim, temos

$$\begin{aligned} \int_{\partial\,\mathrm{HP}} A \cdot d\alpha = &\int_0^{2\pi} A(\sqrt{2}\cos t, -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t, 1) \cdot (-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t, -\sqrt{2}\cos t, 0) dt + \\ &+ \int_0^{2\pi} A(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t, -1) \cdot (-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t, \sqrt{2}\cos t, 0) dt \\ = &\, 0. \end{aligned}$$

Concluímos que $\displaystyle\iint_{\mathrm{HP}} f_{dc} \cdot n = \frac{4}{3}\pi 10^5$, pelo que as medidas de Celestino não alteraram a situação.

Exercício 13 *É véspera de Natal. A vivenda Gaudêncio está muito animada com a reunião de toda a família. Na sala, a Sra. Gaudêncio fuma um havano enquanto conversa com todos. Jack Gaudêncio come donuts atrás de donuts e vai abrindo a porta aos convidados. Consuela e Marcelino consolam Feriado Gaudêncio que não consegue parar de gemer de emoção. André Gil discute alta finança com Celestino, que tem o pé engessado por ter deixado cair os papéis do seu último discurso na Câmara Municipal. E, na acolhedora cozinha dos Gaudêncios, o Sr. Gaudêncio está a cozinhar bolos no forno.*
De repente, saindo aos pulos de debaixo da mesa, o "tiquinho" salta e crava as unhas no capacete negro de Darth Gaudêncio. Este, com o seu conhecido mau feitio, liga de imediato o sabre de luz e golpeia a atmosfera:
- "Ahhh, maldito esquilo, se eu te apanho faço-te em fatias!"
Acidentalmente, o sabre de luz corta a mão mecânica de Luke Gaudêncio:
- "Ai! Ai! Bolas, outra vez não! Oh pai, és mesmo desastrado com essa porcaria!"
A menina Lucialima corre para o centro da cena:
- "Oh darthinho! Pára com isso que ainda magoas mais alguém! Não vez que o teu sabre de luz liberta, no semi-cilindro infinito $z > 0$ *e* $x^2 + y^2 < 1$*, uma densidade de energia por unidade de volume e de tempo dada por"*

$$f(x, y, z) = z\mathrm{sen}^2(z)\exp(-z^2 + x^2 + y^2)\,!$$

- "Que disparate! Isso dava uma energia infinita por unidade de tempo!" - responde Darth Gaudêncio.
- "Claro que não dava. Não percebes nada de AMIII!" - retorquiu a menina Lucialima.

a) Mostre que a menina Lucialima, como sempre, tem razão e que $f(x, y, z)$ é integrável no semi-cilindro infinito.

No outro lado da sala, o Comodoro Gaudêncio conversava com Carlos Quente:
- "Pois é. Ia eu na minha nave a entrar no Hiperbolóide de Pombal e ali o Firmino manda-me encostar na berma:"
- "Oh Comodoro! Tem calma pá! Vais apanhar algum comboio ? Olha que o limite de velocidade na direcção x *é de* $2e + 5/2$*!"*
- "Eu respondi-lhe: Olhó Firmino! Tás bom ? Mas ouve lá, eu não ia depressa demais! De acordo com os instrumentos da minha nave a minha posição x *era dada por* $x(t) = \int_0^{(1+t)^2} (s^2 + st + e^s)ds$*!"*
- "Como somos os dois uns cromos em AMIII, em poucos segundos fizemos as contas. E diz-me o Firmino:"
- "Safas-te mesmo à justa! Não devias andar tão em cima do risco! Olha lá, não me dás boleia para a festa de Natal da família ?"

b) Para justificar a afirmação de Firmino, calcule a velocidade na direcção x da nave do Comodoro no instante $t = 0$.

- "E foi assim que cá chegámos", continuou o Comodoro para Carlos Quente.
Os olhos de Carlos Quente brilharam. Colocou à pressa umas pontas de borracha nas orelhas e perguntou:
- "Oh netinho Comodoro, será que não me arranjas um lugar de oficial cientista na tua nave espacial ? É o que seria lógico."
E, inexplicavelmente, fechou os dedos da mão direita com toda a força na clavícula do Comodoro.

Assim cai o pano sobre as aventuras da família Gaudêncio, que deseja a todos Boas Festas e Excelentes Notas nos exames que se aproximam, especialmente o de AMIII. E quem sabe se um dia, futuros autarcas, não irão alguns de vós necessitar de uma destreza comparável à que os nossos heróis demonstraram nas suas aventuras ?

Resolução:

a) Queremos mostrar que a função

$$f(x,y,z) = z\text{sen}^2(z)\exp(-z^2 + x^2 + y^2)$$

é integrável no semi-cilindro infinito

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1,\ z > 0\}$$

O problema vem do facto de V ser uma região ilimitada. Vamos então considerar os cilindros finitos

$$V_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1,\ k \ge z \ge 0\}$$

Podemos definir uma sucessão de funções $\{f_k\}$ tal que

$$f_k(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), & \text{se } (x,y,z) \in V_k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja $h(x,y,z) = z\exp(-z^2 + x^2 + y^2)$.

É fácil concluir que

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x,y,z) = f(x,y,z) \quad \text{em } V$$

É também evidente que

$$|f_k(x,y,z)| \le h(x,y,z) \quad \text{em } V$$

Por outro lado, para qualquer k, a função f_k é contínua e limitada no interior do compacto V_k e anula-se fora de V_k. Logo, as funções f_k são integráveis em V, i.e. $f_k \in L(V)$.

Se mostrarmos que a função h é integrável em V, então como $|f| \le h$, f será também integrável em V. Além disso, nesse caso, teremos pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\int_V f = \int_V \lim_{k\to\infty} f_k = \lim_{k\to\infty} \int_V f_k = \lim_{k\to\infty} \int_{V_k} f.$$

Para mostrar que $h \in L(V)$ vamos utilizar o teorema da convergência monótona de Levi. Consideramos a sucessão $\{h_k\}$ com $h_k = h$ em V_k e $h_k = 0$ fora de V_k. A sucessão $\{h_k\}$ é monótona crescente porque h é positiva. Além disso, $\lim_{k\to\infty} h_k(x,y,z) = h(x,y,z)$ em V.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_V h_k = \int_{V_k} h &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^k \rho h(\rho,\theta,z)\,d\theta d\rho dz \\ &= 2\pi\Big(\int_0^k z\exp(-z^2)dz\Big)\Big(\int_0^1 \rho\exp(\rho^2)d\rho\Big) \\ &= \frac{1}{2}\pi(-\exp(-z^2))|_0^k(\exp(\rho^2))|_0^1 = \frac{\pi}{2}(e-1)(1-e^{-k^2}) \le \frac{\pi}{2}(e-1) \end{aligned}$$

Logo, a sucessão $\{\int_V h_k\}$ é limitada e, pelo teorema da convergência monótona, $h \in L(V)$. Concluímos então, como já vimos acima, que $f \in L(V)$ e que se tem

$$\int_V f = \lim_{k\to\infty}\int_{V_k} f = \pi(e-1)\lim_{k\to\infty}\int_0^k z\text{sen}^2(z)\exp(-z^2)dz.$$

Portanto, como seria de esperar, a menina Lucialima tem razão.

b) Sendo a coordenada x da posição da nave do Comodoro em função do tempo dada por

$$x(t) = \int_0^{(1+t)^2} (s^2 + st + e^s)ds$$

então, a velocidade na direcção x será dada por

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}(t)$$

Queremos calcular $v_x(0)$. A região de integração é compacta e a integranda é contínua, logo a regra de Leibniz pode ser aplicada.

Consideremos a função definida por

$$\phi(t, a) = \int_0^a (s^2 + st + e^s)ds$$

É fácil ver que

$$x(t) = \phi(t, (1+t)^2)$$

Quando $t = 0$ temos $(1+t)^2 = 1$. Logo,

$$v(0) = \frac{dx}{dt}(0) = \frac{\partial\phi}{\partial t}(0,1) + \frac{\partial\phi}{\partial a}(0,1)\frac{da}{dt}(0).$$

Pela regra de Leibniz temos,

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(0,1) = \int_0^1 \frac{\partial(s^2 + st + e^s)}{\partial t}ds = \int_0^1 sds = 1/2.$$

Por outro lado, pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\frac{\partial\phi}{\partial a}(0,1)\frac{da}{dt}(0) = (s^2 + st + e^s)|_{s=1}\frac{da}{dt}(0) = 2(s^2 + st + e^s)|_{s=1,t=0} = 2(1+e).$$

Concluímos assim que

$$v(0) = \frac{1}{2} + 2(1+e) = \frac{5}{2} + 2e$$

e, portanto, o Comodoro viajava mesmo no limite.