

Análise Matemática III

2º semestre de 1999/2000

Exercício teste 9 (entregar na aula prática da semana de 29/5/00)

Considere a variedade M dada pela equação $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ sendo $0 < z < 2$.

a) Descreva M parametricamente e determine a respectiva dimensão.

b) Determine o espaço tangente e o espaço normal a M no ponto $(0, \sqrt{2}, 1)$.

Solução:

a) Consideremos a função $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$$

Trata-se de uma função de classe C^1 tal que

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$$

ou seja, M é o conjunto de nível zero de F .

A derivada

$$DF(x, y, z) = [2x \quad 2y \quad -2z]$$

tem característica igual a um em todos os pontos de M . De facto, o ponto de coordenadas $(0, 0, 0)$ é o único em que isso não acontece. Mas este ponto não pertence a M .

Portanto, M é uma variedade de dimensão dois em $\mathbb{R}^3$.

Em coordenadas cilíndricas a variedade M é dada pela equação $\rho^2 = z^2 + 1$. Assim, consideremos as funções $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $h : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ definidas por

$$\begin{aligned} g(\theta, z) &= ((\sqrt{z^2 + 1}) \cos \theta, (\sqrt{z^2 + 1}) \sin \theta, z) \\ h(\theta, z) &= ((\sqrt{z^2 + 1}) \cos \theta, (\sqrt{z^2 + 1}) \sin \theta, z) \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} T &= \{(\theta, z) : 0 < \theta < 2\pi; 0 < z < 2\} \\ S &= \{(\theta, z) : -\pi < \theta < \pi; 0 < z < 2\} \end{aligned}$$

Estas duas funções são de classe C^1 , injectivas e as respectivas derivadas são representadas pela mesma matriz

$$\begin{bmatrix} -(\sqrt{z^2 + 1}) \sin \theta & \frac{z}{(\sqrt{z^2 + 1})} \cos \theta \\ (\sqrt{z^2 + 1}) \cos \theta & \frac{z}{(\sqrt{z^2 + 1})} \sin \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que tem característica igual a dois, ou seja, as duas colunas são linearmente independentes.

Note-se que

$$\begin{aligned} g(T) &= M \setminus \{(x, y, z) : y = 0; x \geq 0\} \\ h(S) &= M \setminus \{(x, y, z) : y = 0; x \leq 0\} \end{aligned}$$

e, portanto, $M = g(T) \cup h(S)$, o que quer dizer que g e h parametrizam M .

É de salientar que para o cálculo de integrais sobre M , nomeadamente o cálculo da área, basta considerar a função g porque a diferença $M \setminus g(T)$ é apenas uma linha.

- b) Dado que $g(\frac{\pi}{2}, 1) = (0, \sqrt{2}, 1)$, o espaço tangente a M no ponto $(0, \sqrt{2}, 1)$ é gerado pelas colunas da matriz

$$Dg(\frac{\pi}{2}, 1) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$T_{(0, \sqrt{2}, 1)}M = \{(\sqrt{2}\alpha, \frac{\sqrt{2}}{2}\beta, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

e, portanto, é o plano dado pela equação

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} z$$

O espaço normal a M no ponto $(0, \sqrt{2}, 1)$ é gerado pela linha da matriz

$$DF(0, \sqrt{2}, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$T_{(0, \sqrt{2}, 1)}M^\perp = \{\alpha(0, 2\sqrt{2}, -2) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

e, portanto, é a recta dada pelo sistema de equações

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -\sqrt{2} z \end{aligned}$$