

Análise Matemática III

2º semestre de 1999/2000

Exercício teste 7 (a entregar na aula prática da semana de 15/5/2000)

Considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0), (0,1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{y-1}{x^2 + (y-1)^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + (y-1)^2} \right)$$

Determine o integral de linha do campo F ao longo do caminho que descreve a fronteira do quadrado com vértices nos pontos $(2, 2), (-2, 2), (-2, -2), (2, -2)$ no sentido directo (contrário ao dos ponteiros de um relógio).

Solução:

Designemos por γ o caminho que descreve a fronteira Γ do quadrado e sejam $g_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ os caminhos definidos por

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \left(\frac{1}{4} \cos t, \frac{1}{4} \sin t \right) \\ g_2(t) &= \left(\frac{1}{4} \cos t, \frac{1}{4} (\sin t + 1) \right) \end{aligned}$$

ou seja, g_1 descreve a circunferência C_1 de raio $1/4$ e centro na origem no sentido positivo e g_2 descreve a circunferência C_2 de raio $1/4$ e centro no ponto $(0, 1)$ no sentido positivo.

O campo F pode ser decomposto na soma de dois campos $F = F_1 + F_2$ em que

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \\ F_2(x, y) &= \left(-\frac{y-1}{x^2 + (y-1)^2}, \frac{x}{x^2 + (y-1)^2} \right) \end{aligned}$$

Facilmente se verifica que os campos F_1 e F_2 são fechados, ou seja, o campo F é fechado. Portanto, aplicando o teorema de Green à região limitada pelas circunferências C_1 e C_2 e pela fronteira Γ do quadrado, obtemos

$$0 = \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma - \int_{C_1} F \cdot dg_1 - \int_{C_2} F \cdot dg_2$$

ou seja,

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_{C_1} (F_1 + F_2) \cdot dg_1 + \int_{C_2} (F_1 + F_2) \cdot dg_2$$

Por outro lado, o círculo limitado pela circunferência C_2 não contém a origem e, portanto temos

$$\int_{C_2} F_1 \cdot dg_2 = 0$$

Do mesmo modo, o círculo limitado pela circunferência C_1 não contém o ponto $(0, 1)$ e, portanto, concluímos que

$$\int_{C_1} F_2 \cdot dg_1 = 0$$

Assim, temos

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_{C_1} F_1 \cdot dg_1 + \int_{C_2} F_2 \cdot dg_2$$

Da definição de integral de linha de um campo vectorial obtemos

$$\begin{aligned}\int_{C_1} F_1 \cdot dg_1 &= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t) dt = 2\pi \\ \int_{C_2} F_2 \cdot dg_2 &= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t) dt = 2\pi\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = 2\pi + 2\pi = 4\pi$$