Análise Matemática III
2º semestre de 1999/2000

Exercício teste 2 (a entregar na aula prática da semana de 27/3/2000)

a) Mostre que a função $f : [0,3] \times [0,4] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} -5 & 1 < x < 2\ ,\ 2 < y < 4 \\ -2 & 1 < x < 2\ ,\ 0 < y < 1 \\ 2 & 2 < x < 3\ ,\ 0 < y < 1 \\ \pi & 1 < x < 2\ ,\ 1 < y < 2 \\ 10 & 0 < x < 1\ ,\ 1 < y < 2 \\ 0 & \text{nos restantes casos} \end{cases}$$

é uma função em escada e calcule o respectivo integral.

b) Determine justificadamente se o conjunto

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$$

tem ou não medida nula em $\mathbb{R}^3$.

Resolução

a) Considere-se a partição do intervalo $[0,3] \times [0,4]$ dada por $\{I_{jk}\,;\, j = 1,2,3\,;\, k = 1,2,3\}$ em que

$$\begin{aligned} I_{11} &= [0,1[\times[0,1[\\ I_{12} &= [1,2[\times[0,1[\\ I_{13} &= [2,3] \times [0,1[\\ I_{21} &= [0,1[\times[1,2[\\ I_{22} &= [1,2[\times[1,2[\\ I_{23} &= [2,3] \times [1,2[\\ I_{31} &= [0,1[\times[2,4] \\ I_{32} &= [1,2[\times[2,4] \\ I_{33} &= [2,3] \times [2,4] \end{aligned}$$

Considere-se também o conjunto de valores $\{s_{jk}\,;\, j = 1,2,3\,;\, k = 1,2,3\}$ dados por

$$\begin{aligned} s_{11} &= 0 \\ s_{12} &= -2 \\ s_{13} &= 2 \\ s_{21} &= 10 \\ s_{22} &= \pi \\ s_{23} &= 0 \\ s_{31} &= 0 \\ s_{32} &= -5 \\ s_{33} &= 0 \end{aligned}$$

Assim, temos $f(x,y) = s_{jk}$ para $(x,y) \in I_{jk}$, ou seja, f é uma função em escada e o seu integral é dado por

$$\int_I f = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} s_{jk} vol(I_{jk}) = -2 + 2 + 10 + \pi - 5 \times 2 = \pi$$

b) Considere-se a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Trata-se de uma função contínua e cujo gráfico $G(f)$ é o conjunto S. De facto

$$G(f) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(x, y, x^2 + y^2) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = S$$

Portanto, S tem medida nula em $\mathbb{R}^3$.