

Análise Matemática III

2º semestre de 1999/2000

Exercício Teste 12

Considere a superfície S definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 ; z > 0\}$$

e o campo vectorial

$$F(x, y, z) = (-y, x, xz + y)$$

Calcule o fluxo do rotacional do campo F através de S segundo a normal unitária cuja terceira componente é negativa, usando

- a) Teorema da divergência.
- b) Teorema de Stokes

Solução:

- a) Para usar o teorema da divergência, consideremos o domínio regular D definido por

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1 ; z > 0\}$$

A fronteira de D contém as superfícies S e B , sendo B definida por

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 ; x^2 + y^2 < 1\}$$

Então, aplicando o teorema da divergência ao campo vectorial $\text{rot}F$ e ao domínio D , obtemos

$$\begin{aligned} \int \int \int_D \text{div}(\text{rot}F) &= \int \int_{\partial D} \text{rot}F \cdot \nu \\ &= \int \int_S \text{rot}F \cdot \nu_S + \int \int_B \text{rot}F \cdot \nu_B \end{aligned}$$

em que ν_S é a normal unitária e exterior em S e ν_B é a normal unitária e exterior em B .

Dado que B é uma superfície horizontal, temos

$$\nu_B = (0, 0, -1)$$

Por outro lado, $\text{div}(\text{rot}F) = 0$ e, portanto,

$$\int \int_S \text{rot}F \cdot \nu_S = - \int \int_B \text{rot}F \cdot \nu_B$$

e, tendo em conta que, em B ,

$$\text{rot}F = (1, -z, 2) = (1, 0, 2)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int \int_S \text{rot}F \cdot \nu_S &= - \int \int_B (1, 0, 2) \cdot (0, 0, -1) \\ &= 2\text{vol}_2(B) \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Dado que a normal ν_S é exterior a D em S , tem terceira componente positiva e, portanto, o fluxo pretendido é o simétrico do que foi calculado através do teorema da divergência, ou seja, -2π .

- b) Para usar o teorema de Stokes, notemos que a superfície S é orientável por ser o gráfico da função $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, e a respectiva fronteira é a linha

$$\partial S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 ; x^2 + y^2 = 1\}$$

Dado que a normal unitária ν a considerar tem terceira componente negativa, a fronteira ∂S deve ser descrita no sentido negativo, ou seja deve ser parametrizada por

$$\gamma(t) = (\cos t, -\sin t, 0) ; \quad 0 < t < 2\pi$$

Do teorema de Stokes, obtemos,

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu &= \int_{\partial S} F \cdot d\gamma \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin t, \cos t, -\sin t) \cdot (-\sin t, -\cos t, 0) dt \\ &= -2\pi \end{aligned}$$

tal como na alínea anterior.