

Análise Matemática III

2º semestre de 1999/2000

Exercício Teste 11

Considere a superfície, com densidade de massa $\alpha(x, y, z) = 1/\sqrt{1 + 4(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2}$, definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2, 1 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

Calcule o momento de inércia de S em relação ao eixo dos x .

Solução: S é uma superfície de revolução, com eixo de revolução ao longo do eixo dos z . Para parametrizarmos S , podemos usar coordenadas ρ e θ com $\rho \in]1, 2[$ e $\theta \in]0, 2\pi[$ e a parametrização será $g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 1 + (\rho - 2)^2)$.

Temos

$$Dg(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \\ 2(\rho - 2) & 0 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$V(D_\rho g, D_\theta g) = \|D_\rho g \times D_\theta g\| = (\det(Dg^t Dg))^{1/2} = \rho \sqrt{1 + 4(\rho - 2)^2}.$$

A distância de um ponto (x, y, z) ao eixo dos x é dada por $d_x(x, y, z) = \sqrt{y^2 + z^2}$. O momento de inércia de S relativamente ao eixo dos x é então obtido através de

$$\begin{aligned} I_x(S) &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \alpha(g(\rho, \theta)) d_x^2(g(\rho, \theta)) \rho \sqrt{1 + 4(\rho - 2)^2} d\rho d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho(\rho^2 \sin^2(\theta) + (1 + (\rho - 2)^2)^2) d\rho d\theta = (15/4 + 31/5 + 182/3 - 65)\pi. \end{aligned}$$