

Análise Matemática III

1º semestre de 1999/2000

Exercício teste 8

Considere a variedade

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1; z > \sqrt{x^2 + y^2}; x < 0\}$$

Descreva parametricamente M e determine a respectiva dimensão.

Solução: Trata-se de um pedaço da esfera de raio um e centro na origem de $\mathbb{R}^3$ e que se encontra representado na figura 1. Para descrever M , note-se que $x < 0$ e a intersecção entre o cone

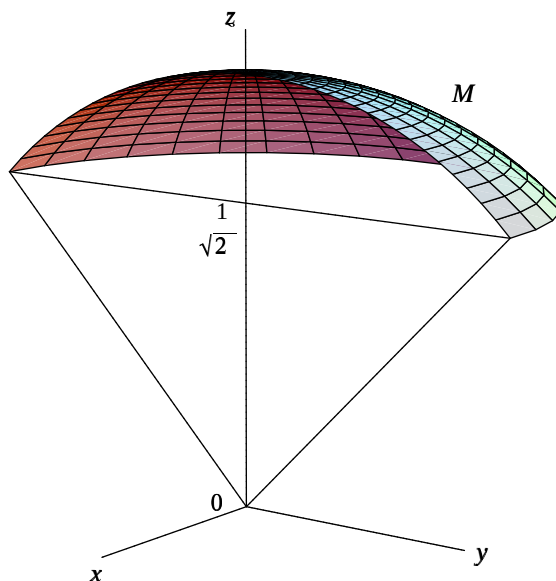


Figura 1: $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1; z > \sqrt{x^2 + y^2}; x < 0\}$

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ é uma circunferência situada no plano $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$, centrada no ponto $(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e de raio igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Na figura estão representados os segmentos de recta $z = y$ e $z = -y$ resultantes da intersecção do cone com o plano $x = 0$.

Em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) podemos descrever M da forma seguinte

$$r = 1; \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}; 0 < \phi < \frac{\pi}{4}$$

e, portanto, considere-se a função $g :]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\times]0, \frac{\pi}{4}[\rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(\theta, \phi) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$$

Esta função é de classe C^1 , injectiva e a sua derivada

$$Dg(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} -\sin \phi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta \\ 0 & -\sin \phi \end{bmatrix}$$

Tem característica igual a 2 dado que $\sin \phi \neq 0$. Além disso, $M = g(]\frac{\pi}{2}, \pi[\times]0, \frac{\pi}{4}[)$, ou seja, g é uma bijecção entre M e um intervalo aberto de $\mathbb{R}^2$. Portanto, G é uma parametrização de M e $\dim(M) = 2$.

Podemos também descrever M em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) :

$$z^2 + \rho^2 = 1; \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi; \quad 0 < \rho < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e considerar a função $g :]\frac{\pi}{2}, \pi[\times]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[\rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \sqrt{1 - \rho^2})$$

Esta função é também de classe C^1 , injectiva e a sua derivada

$$Dg(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \\ -\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} & 0 \end{bmatrix}$$

tem característica igual a 2. Além disso, $M = g(]\frac{\pi}{2}, \pi[\times]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[)$ e, portanto, g é uma parametrização de M e $\dim(M) = 2$.