Análise Matemática III
1º semestre de 1999/2000

Exercício teste 2

Indique justificadamente se os seguintes conjuntos têm ou não medida nula.

a) $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = n\}$

b) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x\}$

c) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = sen(xy)\}$

Solução:

a) S é a união da família numerável de conjuntos

$$S_n = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = n\}$$

Cada um destes conjuntos tem conteúdo nulo (e portanto medida nula) porque é a união dos gráficos em $\mathbb{R}^3$ das funções contínuas $\sqrt{n - x^2 - y^2}$ e $-\sqrt{n - x^2 - y^2}$ sobre os conjuntos compactos em $\mathbb{R}^2$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq n\}$$

Portanto S tem medida nula.

b) S contém o intervalo $[1,2] \times [0,1]$ que não tem medida nula portanto S também não tem medida nula (um subconjunto de um conjunto com medida nula tem medida nula).

c) Podemos escrever S como a união numerável

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n$$

onde

$$S_n = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = sen(xy), -n \leq x \leq n, -n \leq y \leq n\}$$

Como S_n é o gráfico em $\mathbb{R}^3$ da função contínua $sen(xy)$ sobre o intervalo compacto $[-n,n] \times [-n,n]$, S_n tem conteúdo nulo (e portanto medida nula). Logo S tem medida nula.