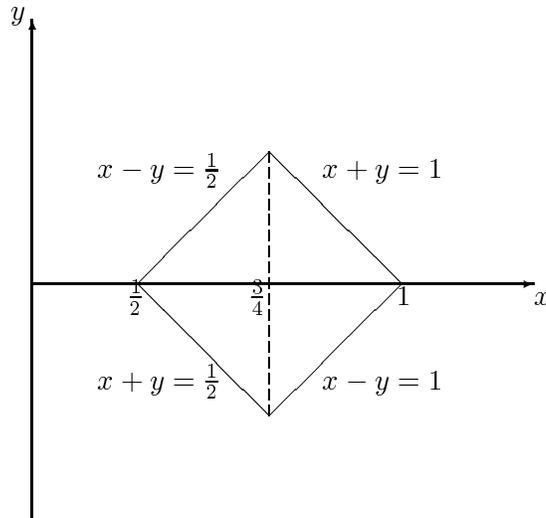


Análise Matemática III

Resolução do 1º Teste - 13 de Novembro de 99 - 15h00

1. a) A região S tem o seguinte aspecto:



Portanto uma expressão para o integral é dada por

$$\int_S f = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \int_{\frac{1}{2}-x}^{x-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} dy dx + \int_{\frac{3}{4}}^1 \int_{x-1}^{1-x} \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} dy dx$$

- b) O jacobiano da transformação

$$\begin{aligned} x &= (u+1)^2 + (v+1)^2 \\ y &= (u+1)^2 - (v+1)^2 \end{aligned}$$

é dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} 2(u+1) & 2(v+1) \\ 2(u+1) & -2(v+1) \end{vmatrix} \\ &= -8(u+1)(v+1) \end{aligned}$$

Nas novas variáveis $(u, v) \in]1, +\infty[\times]1, +\infty[$ o conjunto S é definido pelas condições

$$\begin{aligned} x+y \geq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow (u+1)^2 \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow u \geq -\frac{1}{2} \\ x+y \leq 1 &\Leftrightarrow (u+1)^2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow u \leq -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x-y \geq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow (v+1)^2 \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow v \geq -\frac{1}{2} \\ x-y \leq 1 &\Leftrightarrow (v+1)^2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow v \leq -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Note-se que nas equações acima usámos o facto de se ter $u > -1$ e $v > -1$ para resolver as inequações.

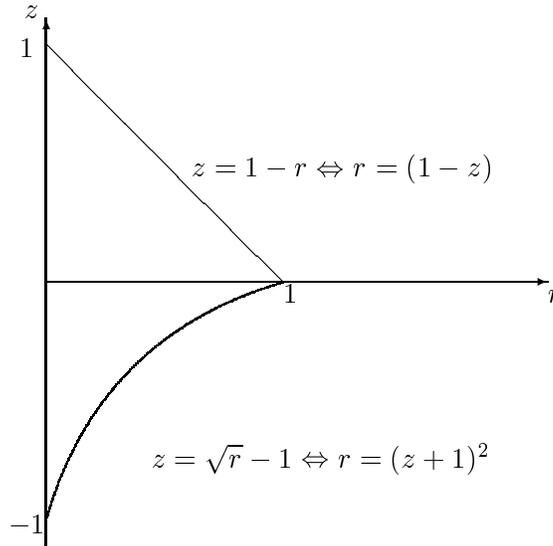
Finalmente, a função f escrita nas novas variáveis é

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{1}{\sqrt{(x-y)(x+y)}} = \frac{1}{\sqrt{4(u+1)^2(v+1)^2}} = \frac{1}{2(u+1)(v+1)}$$

(novamente usando o facto de se ter $u > -1$ e $v > -1$). Portanto, pelo teorema de mudança de variáveis, temos

$$\begin{aligned} \int_S f &= \int_{-\frac{1}{2}}^{-1+\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-\frac{1}{2}}^{-1+\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2(u+1)(v+1)} 8(u+1)(v+1) dudv \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{-1+\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-\frac{1}{2}}^{-1+\frac{1}{\sqrt{2}}} 4 dudv \\ &= 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= (\sqrt{2} - 1)^2 \end{aligned}$$

2. a) Fazendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, V é definido por $\sqrt{r} - 1 \leq z \leq 1 - r$. Portanto V é a seguinte região plana rodada em torno do eixo Oz :



Para cada valor de z fixo, x e y variam num círculo com o raio indicado na figura acima. Assim, uma expressão para o volume é dada pelo integral iterado:

$$\int_{-1}^0 \int_{-(1+z)^2}^{(1+z)^2} \int_{-\sqrt{(1+z)^4 - x^2}}^{\sqrt{(1+z)^4 - x^2}} 1 dy dx dz +$$

$$\int_0^1 \int_{-(1-z)}^{1-z} \int_{-\sqrt{(1-z)^2-x^2}}^{\sqrt{(1-z)^2-x^2}} 1 \, dy dx dz$$

- b) As coordenadas mais adequadas ao cálculo deste integral são coordenadas cilíndricas centradas no eixo Oz . Tendo em conta a figura acima obtemos a seguinte expressão para o volume:

$$\begin{aligned} Vol(V) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\sqrt{r}-1}^{1-r} r \, dz dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 (1-r-\sqrt{r}+1)r \, dr \\ &= \frac{8\pi}{15} \end{aligned}$$

3. a)

$$\frac{\partial}{\partial y} (xe^{x^2+y^2}) = 2xye^{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (ye^{x^2+y^2}) = 2xye^{x^2+y^2}$$

Como as derivadas cruzadas são iguais, o campo é fechado.

- b) Como \mathbb{R}^2 é um conjunto em estrela, podemos concluir da alínea anterior que o campo é gradiente. Portanto o integral ao longo de qualquer caminho fechado em \mathbb{R}^2 é 0.

Alternativamente pode calcular-se o integral directamente.

4. Começamos por observar que é impossível que se tenha $f(x) > A$ para todo o $x \in [0, 1]^n$. De facto, como f é contínua em $[0, 1]^n$, f teria um mínimo $m > A$ e portanto

$$\int_{[0,1]^n} f \geq \int_{[0,1]^n} m = m Vol([0, 1]^n) = m > A$$

Da mesma forma vemos que é impossível que se tenha $f(x) < A$ para todo o $x \in [0, 1]^n$.

Seja então f tal que $\int_{[0,1]^n} f = A$ e suponhamos que não existe $x \in [0, 1]^n$ tal que $f(x) = A$. Então de acordo com as observações anteriores existem necessariamente $x_1 \in [0, 1]^n$ tal que $f(x_1) > A$ e $x_2 \in [0, 1]^n$ tal que $f(x_2) < A$.

Mas então pelo teorema do valor médio, existe $s \in [0, 1]$ tal que a função contínua $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = f(tx_1 + (1-t)x_2)$$

verifica $g(s) = A$. Como $sx_1 + (1-s)x_2 \in [0, 1]^n$ isto contradiz a hipótese que pusemos sobre f de nunca assumir o valor A .

Concluimos que existe necessariamente $x \in [0, 1]^n$ tal que $f(x) = A$ como pretendíamos demonstrar.