

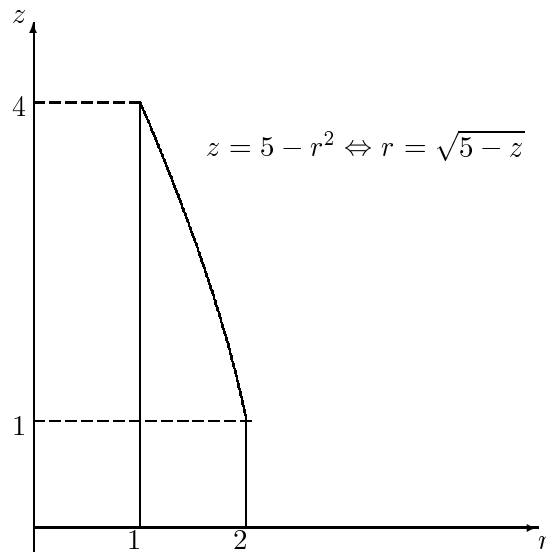
Análise Matemática III

Resolução do 2º Teste e 1º Exame - 20 de Janeiro 2000 - 13 horas

1. O sólido tem simetria cilíndrica em torno do eixo Oz . A expressão de V em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) é:

$$1 < r < 2; 0 < z < 5 - r^2; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

portanto S é o sólido que se obtém rodando a seguinte figura em torno do eixo Oz sobre o primeiro quadrante do plano xOy



- a) Assim, para cada valor fixo de z entre 1 e 4, (x, y) variam numa região entre dois quartos de circunferência. A circunferência interior tem sempre raio 1. Quando z está entre 0 e 1 a de fora tem raio 2, quando z está entre 1 e 4, a circunferência de fora tem raio $r = \sqrt{5-z}$.

Portanto uma expressão para o volume de V da forma pretendida é

$$\int_V 1 = \int_0^1 \left(\int_0^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx dy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} dx dy \right) dz + \int_1^4 \left(\int_0^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{5-z-y^2}} dx dy + \int_1^{\sqrt{5-z}} \int_0^{\sqrt{5-z-y^2}} dx dy \right) dz$$

- b) Para calcular as coordenadas do centróide, o mais fácil é usar coordenadas cilíndricas (ver acima para a expressão do sólido em coordenadas cilíndricas)

$$\begin{aligned}
\int_V 1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \int_0^{5-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta \\
&= \frac{\pi}{2} \int_1^2 (5r - r^3) \, dr \\
&= \frac{15\pi}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_V x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \int_0^{5-r^2} r^2 \cos \theta \, dz \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta \int_1^2 (5r^2 - r^4) \, dr \\
&= \frac{72}{15}
\end{aligned}$$

Por simetria temos

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{\frac{72}{15}}{\frac{15\pi}{8}} = \frac{576}{225\pi}$$

$$\begin{aligned}
\int_V z &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \int_0^{5-r^2} zr \, dz \, dr \, d\theta \\
&= \frac{\pi}{2} \int_1^2 \frac{1}{2} r (5 - r^2)^2 \, dr \\
&= -\frac{\pi}{24} (5 - r^2)^3 \Big|_1^2 \\
&= \frac{63\pi}{24}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\bar{z} = \frac{\frac{63\pi}{24}}{\frac{15\pi}{8}} = \frac{63}{45}$$

2. A expressão da região de integração sugere a mudança de variáveis

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = y - e^x \end{cases}$$

De facto nestas coordenadas a região S escreve-se

$$\begin{aligned}
-y < x < 3 - y &\Leftrightarrow 0 < x + y < 3 &\Leftrightarrow 0 < u < 3 \\
e^x + 1 < y < e^x + 2 &\Leftrightarrow 1 < y - e^x < 2 &\Leftrightarrow 1 < v < 2
\end{aligned}$$

Precisamos no entanto de provar que $(u, v) = g(x, y) = (x + y, y - e^x)$ é uma transformação de coordenadas. Claramente g é C^1 em \mathbb{R}^2 , e

$$\det Dg = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -e^x & 1 \end{vmatrix} = 1 + e^x$$

nunca se anula. Resta ver que g é injectiva:

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = y - e^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = u - x \\ x + e^x = u - v \end{cases}$$

Apesar de não conseguirmos resolver explicitamente a última equação, como a função $h(x) = x + e^x$ tem derivada estritamente positiva, tem uma inversa de classe C^1 em \mathbb{R} e o sistema anterior tem como solução única

$$\begin{cases} y = u - h^{-1}(u - v) \\ x = h^{-1}(u - v) \end{cases}$$

Assim g é injectiva e portanto é uma transformação de coordenadas.

Podemos agora aplicar o teorema da mudança de variáveis:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -e^x & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1 + e^x}$$

logo

$$\begin{aligned} \int_S \frac{e^x + 1}{\sqrt{y - e^x}} dx dy &= \int_0^3 \int_1^2 \frac{e^x + 1}{\sqrt{v}} \frac{1}{1 + e^x} dv du \\ &= 3 \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{v}} dv \\ &= 6(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

3. a) Temos

$$\alpha'(t) = (-e^{-t} \cos t - e^{-t} \operatorname{sent}, -e^{-t} \operatorname{sent} + e^{-t} \cos t)$$

O comprimento de α é dado pelo integral

$$\begin{aligned} \int_0^{4\pi} \|\alpha'(t)\| dt &= \int_0^{4\pi} \sqrt{2e^{-2t}} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{4\pi} e^{-t} dt \\ &= \sqrt{2}(1 - e^{-4\pi}) \end{aligned}$$

b) Substituindo o caminho α na expressão de F obtemos uma expressão muito complicada. Por isso em vez de tentarmos calcular o integral directamente vamos tentar aplicar o teorema fundamental do cálculo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{1 + x^2 + y^2} \right) = -\frac{2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{1 + x^2 + y^2} \right)$$

portanto o campo F é fechado. Como está definido e é C^1 em \mathbb{R}^2 que é um conjunto em estrela, concluímos que F é um gradiente¹. Um potencial V para F obtém-se resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{x}{1+x^2+y^2} \\ \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{y}{1+x^2+y^2} \end{cases} \Leftrightarrow V(x, y) = \frac{1}{2} \log(1+x^2+y^2) + C$$

Então pelo teorema fundamental do cálculo, temos que o trabalho realizado pela força F ao longo do caminho α é dado por

$$\begin{aligned} \int F.d\alpha &= V(\alpha(4\pi)) - V(\alpha(0)) \\ &= V(e^{-4\pi}, 0) - V(1, 0) = \log(1 + e^{-8\pi}) - \log 2 \end{aligned}$$

4. a) A superfície S é uma porção de superfície esférica. Em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) é descrita por

$$r = \sqrt{2}; -1 < r \cos \phi < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos \phi < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{4}$$

Portanto uma parametrização² é dada por

$$g(\theta, \phi) = (\sqrt{2} \cos \theta \text{sen} \phi, \sqrt{2} \text{sen} \theta \text{sen} \phi, \sqrt{2} \cos \phi)$$

com $0 < \theta < 2\pi$ e $\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{4}$. Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \phi} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sqrt{2} \text{sen} \theta \text{sen} \phi & \sqrt{2} \cos \theta \text{sen} \phi & 0 \\ \sqrt{2} \cos \theta \cos \phi & \sqrt{2} \text{sen} \theta \cos \phi & -\sqrt{2} \text{sen} \phi \end{vmatrix} \\ &= (-2 \cos \theta \text{sen}^2 \phi, -2 \text{sen} \theta \text{sen}^2 \phi, -2 \text{sen} \phi \cos \phi) \end{aligned}$$

Portanto o momento de inércia em relação ao eixo Oz é dado por

$$\begin{aligned} I_z &= \int_S -z(x^2 + y^2) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} -\sqrt{2} \cos(\phi) 2 \text{sen}^2 \phi \left\| \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \phi} \right\| d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} -2\sqrt{2} \cos \phi \text{sen}^2(\phi) 2 \text{sen} \phi d\phi d\theta \\ &= -8\sqrt{2}\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos \phi \text{sen}^3(\phi) d\phi \\ &= -2\sqrt{2} \text{sen}^4 \phi \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \\ &= 2\sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

¹Também se podia ter concluído isto imediatamente notando que o campo é radial

²Na realidade isto é uma parametrização de S a menos de um conjunto de medida-2 nula.

- b) Uma vez que temos a parametrização podemos determinar uma base para o espaço tangente calculando as derivadas parciais da parametrização no parâmetro correspondente ao ponto $(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2})$. No entanto dá um certo trabalho encontrar o parâmetro e por isso é melhor achar o espaço tangente a partir do espaço normal. O espaço normal no ponto em questão é gerado por $\nabla F(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2})$ com $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, isto é por
- $$(1, \sqrt{6}, 1)$$

Portanto

$$T_{\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}} S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + \sqrt{6}y + z = 0\}$$

5. Seja n a normal a S unitária com componente segundo x positiva.

- a) Podemos aplicar o teorema da divergência ao volume

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 + y^2 + z^2 < x < 0\}$$

A fronteira de V é $\partial V = S \cup D$ onde D é a “tampa”

$$D = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 1\}$$

Como a normal a S dada é a normal interior a V , e a normal a D unitária exterior a V é $(1, 0, 0)$, o teorema da divergência diz que

$$\int_V \operatorname{div} F = - \int_S F \cdot n + \int_D F \cdot (1, 0, 0)$$

isto é o fluxo de F através de S é dado por

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot n &= \int_D 1 + x^2 + xy^3 - \int_V 2x + y^3 + x - 3x \\ &= \int_D 1 - \int_V y^3 \\ &= \text{área}(D) - 0 \\ &= \pi \end{aligned}$$

onde o cálculo do integral de volume foi feito usando a simetria da região de integração e da função integranda.

- b) Para calcular o fluxo de $\operatorname{rot} G$ podemos usar o teorema de Stokes. Este teorema diz que

$$\int_S \operatorname{rot} G \cdot \nu = \oint_{\partial S} G$$

onde ∂S é percorrida no sentido dado a partir da normal ν pela regra da mão direita. O bordo de S é a circunferência

$$\partial S = \{(0, y, z) : y^2 + z^2 = 1\}$$

e a regra da mão direita aplicada à normal dada no enunciado (que é $-n$) diz que ∂S deve ser percorrida no sentido que visto do eixo positivo dos x é o dos ponteiros do relógio. Assim uma parametrização para ∂S é dada por

$$g(t) = (0, -\cos t, \sin t), \quad 0 < t < 2\pi$$

e

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} G &= \int_0^{2\pi} (0, \sin t, \cos t) \cdot (0, \sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Concluimos que o fluxo de $\text{rot}G$ através de S no sentido indicado é 2π .

6. a) Uma vez que

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$$

temos que

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \dots > \frac{1}{x}$$

Como $\frac{1}{x}$ não é integrável em $[1, +\infty[$, f também não é.

b) Como a região de integração e a função têm simetria radial, mudamos para coordenadas polares

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{(x^2+y^2)^{5/4}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{r}}}}{r^{\frac{5}{2}}} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{\sqrt{r}}} r^{-\frac{3}{2}} dr d\theta \end{aligned}$$

A razão porque não podemos calcular directamente o segundo integral é que a região de integração é ilimitada³. Assim vamos usar o teorema da convergência monótona para escrever o integral como o limite de uma sucessão de integrais que podemos calcular directamente.

Seja $f_k :]0, 2\pi[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ a sucessão de funções definidas por

$$f_k(r, \theta) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\sqrt{r}}} r^{-\frac{3}{2}} & \text{se } \frac{1}{k} \leq r \leq k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

³Note-se que $\lim_{r \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{\sqrt{r}}} r^{-\frac{3}{2}} = 0$

Então para todo o k , f_k é integrável em $]0, 2\pi[\times]0, +\infty[$ porque

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} f_k dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{k}}^k e^{-\frac{1}{\sqrt{r}}} r^{-\frac{3}{2}} dr d\theta$$

é o integral de uma função contínua num intervalo compacto.

Como a função f é positiva, a sucessão de funções f_k é crescente (isto é, $f_k(r, \theta) \leq f_{k+1}(r, \theta)$ para todo o $(r, \theta) \in]0, 2\pi[\times]0, +\infty[$).

Finalmente, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{k}}^k e^{-\frac{1}{\sqrt{r}}} r^{-\frac{3}{2}} dr d\theta &= 4\pi \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{1}{2} r^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{r}}} dr \\ &= 4\pi e^{-\frac{1}{\sqrt{r}}} \Big|_{\frac{1}{k}}^k \\ &= 4\pi (e^{-\frac{1}{\sqrt{k}}} - e^{-\sqrt{k}}) \end{aligned}$$

Portanto a sucessão dos integrais $\int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} f_k dr d\theta$ é limitada, (converge para 4π).

Como $f_k(r, \theta) \rightarrow f(r, \theta)$ para todo o $(r, \theta) \in]0, 2\pi[\times]0, +\infty[$ quando k tende para ∞ , o teorema da convergência monótona garante que f é integrável em $]0, 2\pi[\times]0, +\infty[$ e

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} f(r, \theta) dr d\theta = 4\pi$$

Conclusão:

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{(x^2+y^2)^{5/4}} dx dy = 4\pi$$