

## Análise Matemática III

Resolução do 1º Teste - 11 de Novembro de 00 - 9h00

1. a) O conjunto tem simetria cilíndrica em relação ao eixo dos  $z$ . Seja  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , como é habitual nas coordenadas cilíndricas. Fazendo um corte vertical, por exemplo segundo o plano  $x = 0$ , observamos que o sólido é obtido por rotação em torno do eixo dos  $z$ , para  $x, y \geq 0$ , da região que está simultaneamente no interior da circunferência de raio 2 centrada na origem do plano  $\rho z$  e no interior da circunferência de raio 2 centrada em  $(2, 0)$  no mesmo plano.

Essas duas circunferências intersectam-se no ponto  $(1, \sqrt{3})$  do plano  $\rho z$ , para  $z \geq 0$ . Para um  $z$  fixo entre 0 e  $\sqrt{3}$ , o corte horizontal correspondente projectado no plano  $xy$  consiste portanto na região com  $x, y \geq 0$  compreendida entre as circunferências centradas na origem de raios  $2 - \sqrt{4 - z^2}$  e  $\sqrt{4 - z^2}$ . Temos assim,

$$\begin{aligned} Vol(V) &= \int_0^{\sqrt{3}} \left( \int_0^{2-\sqrt{4-z^2}} \left( \int_{\sqrt{(2-\sqrt{4-z^2})^2-y^2}}^{\sqrt{(4-z^2)-y^2}} dx \right) dy \right) dz + \\ &+ \int_0^{\sqrt{3}} \left( \int_{2-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} \left( \int_0^{\sqrt{(4-z^2)-y^2}} dx \right) dy \right) dz. \end{aligned}$$

- b) Utilizando coordenadas cilíndricas obtemos, pela alínea anterior,

$$M = \int_0^{\sqrt{3}} \left( \int_{2-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} \left( \int_0^{\pi/2} z \rho d\theta \right) d\rho \right) dz = \pi \int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-z^2} - 1)z dz = 5\pi/6.$$

2. Consideremos a mudança de coordenadas dada por  $(u, v) = g(x, y) = (x + y, y - 2x)$ . A transformação  $g$  é de classe  $C^1$  pois é linear e é injectiva pois  $(x, y) = g^{-1}(u, v) = ((u - v)/3, (2u + v)/3)$ . Temos também  $\det Dg = 3$ . Em termos das coordenadas  $(u, v)$  a região  $U$  é descrita por

$$g(U) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 1, 1 < v < 2\}.$$

Pelo teorema da mudança de coordenadas de integração temos então,

$$\begin{aligned} \int_U \text{sen}(x + y) e^{2x-y} dx dy &= \int_{g(U)} \text{sen}(u) e^{-v} \frac{1}{3} du dv = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \text{sen}(u) du \int_1^2 e^{-v} dv = \frac{1}{3} (1 - \cos(1))(e^{-1} - e^{-2}). \end{aligned}$$

3. a) Facilmente se verifica que

$$\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1 = -xy/(x^2 + y^2 - 4)^{3/2},$$

pelo que  $f$  é um campo vectorial fechado.

- b) procuramos um campo escalar  $\phi$  tal que  $\nabla\phi = f$ , ou seja  $\partial_x\phi = f_1$  e  $\partial_y\phi = f_2$ . Integrando a primeira equação obtemos  $\phi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + h(y)$ . Substituindo na segunda equação obtemos  $h = \text{const.}$ , pelo que podemos tomar  $\phi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ . Esta função é de classe  $C^1$  em  $S$  pelo que  $f$  é um gradiente nesse conjunto.
- c) O caminho  $g$  está contido em  $S$  e une os pontos  $(-1, 4)$  e  $(2, 7)$ . pelo teorema fundamental do cálculo temos  $\int f dg = \int \nabla\phi dg = \phi(2, 7) - \phi(-1, 4) = 7 - \sqrt{13}$ .

4. Seja  $h(t)$ , com  $t \in [a, b]$ , um caminho regular que parametriza a curva fechada  $C$ . Seja  $(x, y) = G(u, v) = (f(u, v), g(u, v))$ . A imagem  $G(C)$  da curva  $C$  no plano  $xy$  será então parametrizada pelo caminho  $G \circ h(t) = G(h(t)) = (f(h(t)), g(h(t)))$ . Temos que  $(G \circ h)'(t) = DG h'(t)$ , onde  $DG$  é a matriz Jacobiana de  $G$ . Calculando o trabalho do campo vectorial  $a(x, y) = (0, x)$  ao longo de  $G \circ h(t)$  obtemos

$$\begin{aligned} W &= \int a d(G \circ h) = \int_a^b (0, x(G \circ h(t))) \cdot (G \circ h)'(t) dt = \int_a^b (0, f(h(t))) \cdot (G \circ h)'(t) dt = \\ &= \int_a^b f(h(t))((\partial_u g)h'_1 + (\partial_v g)h'_2)(t) dt = \int_a^b (f\partial_u g, f\partial_v g) \cdot h'(t) dt = \int (f\partial_u g, f\partial_v g) dh, \end{aligned}$$

que é o trabalho do campo  $(f\partial_u g, f\partial_v g)$  ao longo de  $C$  como indicado na sugestão.

Podemos agora aplicar o teorema de Green a ambos os lados desta equação obtendo

$$\int \int_{G(R)} dx dy = \int \int_R (\partial_u f \partial_v g - \partial_v f \partial_u g) du dv = \int \int_R \det(DG) du dv,$$

como pretendíamos demonstrar.